

ISSN 1898-6447

Uniwersytet
Ekonomiczny
w Krakowie

Zeszyty Naukowe

Cracow Review
of Economics
and Management

Nr 11 (971)

Kraków 2017



Uniwersytet
Ekonomiczny
w Krakowie

Zeszyty Naukowe

Cracow Review
of Economics
and Management

Nr 11 (971)

Kraków 2017

Rada Naukowa

Andrzej Antoszewski (Polska), Slavko Arsovski (Serbia), Josef Arlt (Czechy), Daniel Baier (Niemcy), Hans-Hermann Bock (Niemcy), Ryszard Borowiecki (Polska), Giovanni Lagioia (Włochy), Tadeusz Markowski (Polska), Martin Mizla (Słowacja), David Ost (USA), Józef Pocięcha (Polska), Vesna Žabkar (Słowenia)

Komitet Redakcyjny

Joanna Dzwonczyk, Ryszard Kowalski (sekretarz), Barbara Pawełek, Aleksy Poczowski (redaktor naczelny), Krystyna Przybylska, Tadeusz Sikora, Grzegorz Strupczewski (sekretarz), Wanda Sułkowska, Monika Szaraniec, Angelika Wodecka-Hyjek (sekretarz), Bernard Ziębicki

Redaktor statystyczny

Paweł Ulman

Redaktorzy Wydawnictwa

Justyna Bohdan, Agnieszka Penarska, Monika Rusin, Seth Stevens (streszczenia w j. angielskim)

Projekt okładki i układ graficzny tekstu

Marcin Sokołowski

Czasopismo jest indeksowane w następujących bazach:

BazEkon (<https://bazybg.uek.krakow.pl/bazekon>), CEEOL (www.ceeol.com),

CEJSH (<http://cejsh.icm.edu.pl>) oraz ICI World of Journals

(<https://journals.indexcopernicus.com>)

© Copyright by Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Kraków 2017

ISSN 1898-6447

Wersja pierwotna: publikacja drukowana

Teksty artykułów są dostępne na stronie internetowej czasopisma:

www.zeszyty-naukowe.uek.krakow.pl oraz w bazie CEEOL

Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie

31-510 Kraków, ul. Rakowicka 27, tel. 12 293 57 42, e-mail: wydaw@uek.krakow.pl

www.zeszyty-naukowe.uek.krakow.pl

Zakład Poligraficzny Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, 31-510 Kraków, ul. Rakowicka 27
Zam. 73/18

Spis treści

Grażyna Dehnel	
Dobór modelu a obciążenie szacunku na przykładzie estymatora GREG w badaniu małych przedsiębiorstw	5
Marcin Salamaga	
Identyfikacja wzorców konsolidacji fiskalnej na przykładzie krajów Unii Europejskiej	27
Sergiusz Herman	
Specyfika branżowa spółek akcyjnych w Polsce a prognozowanie ich upadłości	41
Jacek Batóg, Krzysztof Dmytrów	
Ekonometryczna analiza produktywności kapitału w krajach Unii Europejskiej	61
Urszula Załuska, Dorota Kwiatkowska-Ciotucha	
Analiza porównawcza sytuacji osób w wieku niemobilnym w krajach Unii Europejskiej	75
Iwona Foryś, Barbara Batóg	
Porównanie kondycji rynku mieszkaniowego największych polskich miast w różnych fazach cyklu koniunkturalnego	95
Justyna Mokrzycka	
Porównanie bayesowskich modeli Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z asymetrycznością rozkładów warunkowych	111

Grażyna Dehnel

Dobór modelu a obciążenie szacunku na przykładzie estymatora GREG w badaniu małych przedsiębiorstw

Streszczenie

Estymacja dotycząca populacji charakteryzujących się silną asymetrią i obecnością obserwacji odstających jest zagadnieniem trudnym, zwłaszcza gdy prowadzona jest na niskim poziomie agregacji. Zastosowanie klasycznych, bezpośrednich metod estymacji nie pozwala na otrzymanie wiarygodnych szacunków. Potrzeba uzyskania szczegółowych informacji oraz szerszych możliwości wykorzystania danych pochodzących z rejestrów administracyjnych skłania do poszukiwania innych, nieklasycznych metod szacunku. Przykładem może być estymacja typu GREG. W artykule podjęto próbę zbadania wpływu wyboru modelu uwzględnionego w ramach estymatora GREG na jakość szacunku parametru populacji przedsiębiorstw. Analizę przeprowadzono na podstawie danych pochodzących z badania małych przedsiębiorstw. Badaną zmienną był przeciętny przychód przedsiębiorstwa. Jako zmienne pomocnicze wykorzystano zmienne opóźnione pochodzące z rejestrów administracyjnych. Badanie prowadzono w przekroju województw z uwzględnieniem rodzaju prowadzonej działalności gospodarczej.

Słowa kluczowe: estymacja GREG, statystyka gospodarcza, estymacja typu *model-assisted*, obserwacje odstające.

Klasyfikacja JEL: C40, C51.

1. Wprowadzenie

Rosnące potrzeby informacyjne w zakresie statystyki gospodarczej powodują konieczność prowadzenia badań w kierunku wzbogacenia i rozszerzenia zakresu dostarczanych danych dotyczących przedsiębiorczości. Zadanie to jest o tyle trudne, że badaniom prowadzonym na podstawie populacji przedsiębiorstw towarzyszy zwiększający się z roku na rok odsetek braków odpowiedzi. Dodatkowo zakres zmian w systemie statystyki gospodarczej, które brane są pod uwagę, jest ograniczony przez takie czynniki, jak koszty badania oraz obciążenie respondentów wynikające ze sprawozdawczości statystycznej. Zaspokojenie potrzeby uzyskania informacji wymusza zatem poszukiwanie metod szacunku zmierzających do zwiększenia stopnia wykorzystania źródeł administracyjnych. Adaptacja nowych rozwiązań ma przyczynić się do poprawy efektywności prowadzonych szacunków, a przede wszystkim do zwiększenia liczby przekrojów, w których publikowane są dane. Próby adaptacji nieklasycznych metod estymacji w odniesieniu do podmiotów gospodarczych zostały podjęte m.in. w pracach: [Chambers i in. 2014, Clark, Kocic i Smith 2017, Dehnel 2014, 2016]. Szukając nowych podejść do estymacji parametrów dotyczących przedsiębiorstw, należy uwzględnić specyfikę badanej populacji. Populacja przedsiębiorstw charakteryzuje się m.in. obecnością obserwacji odstających. Mając to na względzie, w niniejszym artykule poddano analizie metodę szacunku stosowaną w ramach statystyki małych obszarów zaliczaną do grupy *model-assisted*. Celem badania była ocena wpływu doboru modelu uwzględnionego w ramach estymatora typu GREG na jakość szacunku przeciętnego przychodu małych przedsiębiorstw. W estymacji zaproponowano wykorzystanie opóźnionych zmiennych pomocniczych pochodzących z zasobów administracyjnych. Oceny estymatorów dokonano na podstawie badania empirycznego, w którym wykorzystano dane dotyczące małych przedsiębiorstw działających w ramach sekcji: przemysł, budownictwo, handel i transport.

2. Metoda estymacji

W badaniach prowadzonych w zakresie statystyki przedsiębiorstw opartych na podejściu modelowym często zdarza się, że warunek dotyczący homoskedastyczności nie jest zachowany. Prowadzi to do nieefektywnych ocen parametrów regresji. Stąd też poszukuje się metod, które pozwolą na złagodzenie naruszenia założeń liniowego modelu regresji. Przykładem może być modyfikacja estymatora GREG zaproponowana w pracy R. Chambersa, H. Falveya, D. Hedlina i P. Kokica [2001], zwana dalej modelem Chambersa.

W modelu Chambersa proponuje się włączenie do modelu dodatkowej zmiennej pomocniczej z_i^{γ} . W ramach klasycznej postaci estymatora GREG wartości globalnej zmiennej Y [Lehtonen, Särndal i Veijanen 2016]

$$\hat{Y}_{GREG,d} = \sum_{i \in U_d} \hat{y}_i + \sum_{i \in s_d} w_i e_i, \quad (1)$$

gdzie $\hat{y}_i = \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_d$, wektor parametrów modelu $\hat{\boldsymbol{\beta}}_d$ szacowany jest na podstawie zmodyfikowanego wzoru uwzględniającego dodatkową zmienną z [Chambers i in. 2001]:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_d = \left(\sum_{i \in s_d} \frac{w_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'}{z_i^{\gamma}} \right)^{-1} \left(\sum_{i \in s_d} \frac{w_i \mathbf{x}_i y_i}{z_i^{\gamma}} \right), \quad (2)$$

gdzie:

w_i – wagi wynikające ze schematu losowania,

\mathbf{x} – wektor zmiennych pomocniczych, w zależności od podejścia – liczba osób pracujących lub przychód,

z_i^{γ} – zmienna pomocnicza w modelu regresji y względem x zakładającym heteroskedastyczność, w zależności od podejścia – liczba osób pracujących lub przychód,

γ – parametr określający stopień heteroskedastyczności,

U_d – część populacji generalnej o elementach należących do domeny d ,

s_d – część próby wylosowanej z populacji o elementach należących do domeny d .

Estymator modelu Chambersa wyrażony za pomocą wzoru (1) można przedstawić w postaci, która jest tożsama z formułą klasycznego estymatora GREG:

$$\hat{Y}_{GREG,d} = \sum_{i \in s_d} w_i g_i y_i. \quad (3)$$

Różnica dotyczy jedynie definicji wagi g_i zależnej od wartości cechy dodatkowej x u jednostek wylosowanych do próby, zdefiniowanej jako:

$$g_i = 1 + (X_d - \hat{X}_{HT,d}) \left(\sum_{i \in s_d} \frac{w_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'}{z_i^{\gamma}} \right)^{-1} \left(\frac{\mathbf{x}_i}{z_i^{\gamma}} \right), \quad (4)$$

gdzie:

d – domena,

g_i – wagi zależne od wartości cechy dodatkowej u i -tej jednostki wylosowanej do próby,

$\hat{Y}_{GREG,d}$ – ocena wartości globalnej w domenie d na podstawie estymatora GREG,

$\hat{X}_{HT,d}$ – estymator bezpośredni Horvitz-Thompsona wartości globalnej zmiennej pomocniczej x w domenie d ,

X – wartość globalna zmiennej pomocniczej x ,

γ – parametr określający stopień heteroskedastyczności, dla $\gamma = 0$ estymator modelu Chambersa przyjmuje klasyczną postać estymatora GREG.

Na podstawie wcześniej prowadzonych badań statystycznych wiadomo, że wartość parametru γ zawiera się w przedziale $\langle 1, 2 \rangle$ [Särndal, Swensson i Wretman 1992], stąd też w przeprowadzonym badaniu przeanalizowano trzy podejścia (dla γ równego odpowiednio 1, 1,5 i 2) reprezentujące estymatory \hat{Y}_{GREG}^1 , $\hat{Y}_{GREG}^{1.5}$, \hat{Y}_{GREG}^2 . W estymatorach tych w liniowym modelu regresji dopuszcza się niezachowanie warunku homoskedastyczności, przy czym poziom heteroskedastyczności określany jest przez parametr γ .

3. Założenia badania

Badaniem empirycznym objęto małe przedsiębiorstwa (10–49 pracujących) prowadzące działalność gospodarczą w ramach sekcji: przemysł, budownictwo, handel i transport. Analizie poddano model, w którym zmienną zależną stanowił przychód uzyskany przez przedsiębiorstwa w czerwcu 2012 r. Za zmienne niezależne przyjęto przychód, koszt oraz liczbę pracujących według stanu zanotowanego w grudniu 2011 r. Decyzję o wykorzystaniu zmiennych opóźnionych podjęto, biorąc pod uwagę ograniczenia czasowe, z jakimi musi się liczyć GUS, prowadząc badania statystyczne. Chodzi przede wszystkim o opóźnienie, jakie ma miejsce przy przekazywaniu statystyce publicznej zasobów administracyjnych [Wykorzystanie danych... 2016].

Dane dotyczące zmiennej zależnej pochodziły z badania DG-1 [Dehnel 2014]. Z kolei źródłem informacji o zmiennych niezależnych były rejestry administracyjne. Szacunku dokonano w przekroju regionalnym, z uwzględnieniem rodzaju prowadzonej działalności gospodarczej. Przekrój regionalny obejmował jednostki na poziomie województw, zaś rodzajowi prowadzonej działalności odpowiadały sekcje PKD.

W ocenie jakości estymacji za punkt odniesienia przyjęto oszacowania otrzymane na podstawie estymatorów bezpośrednich – Horwitza-Thompsona (HT) i typu GREG, włączając w to jego postać ilorazową (oznaczoną w artykule jako RAT).

Estymator HT

$$\hat{Y}_{HT,d} = \frac{N_d}{n_d} \sum_{i \in s_d} y_i, \quad (5)$$

gdzie:

$\hat{Y}_{HT,d}$ – estymator bezpośredni HT wartości globalnej zmiennej y w domenie d ,

N_d – liczebność populacji generalnej w domenie d ,

n_d – liczebność próby w domenie d ,

y_i – wartość zmiennej badanej u i -tej jednostki.

Estymator GREG

$$\hat{Y}_{GREG,d}^0 = \hat{Y}_{GREG,d} = \sum_{i \in U_d} \hat{y}_i + \sum_{i \in s_d} w_i e_i, \quad (6)$$

gdzie $\hat{y}_i = \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_d$, wektor parametrów modelu $\hat{\boldsymbol{\beta}}_d$ szacowany jest na podstawie wzoru [Rao, Molina 2015]:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_d = \left(\sum_{i \in s_d} w_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' \right)^{-1} \left(\sum_{i \in s_d} w_i \mathbf{x}_i y_i \right). \quad (7)$$

Estymator \hat{Y}_{GREG}^0 przyjmuje postać estymatora typu GREG, jednak jego wartości różnią się od szacunków otrzymanych na podstawie klasycznego podejścia GREG. Różnice wynikają z tego, że w przypadku estymatora modelu Chambersa \hat{Y}_{GREG}^0 w szacunku nie są uwzględniane wszystkie jednostki wylosowane do próby z domeny d . Pomijane są bowiem te, dla których zmienna pomocnicza ‘ z ’ przyjmuje wartość zero.

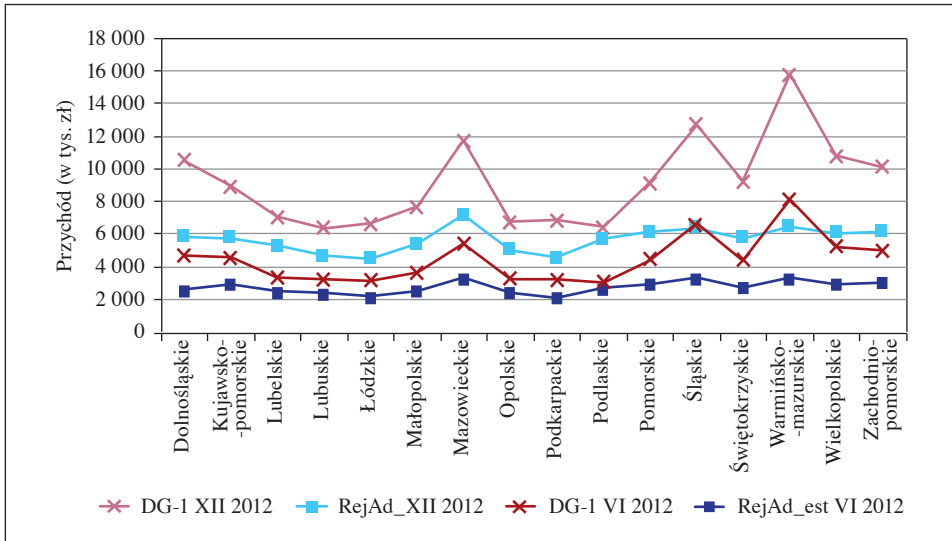
Jako zmienne pomocnicze typu ‘ x ’ i ‘ z ’ wykorzystano liczbę osób pracujących (dane pochodzące z ZUS) oraz przychody (dane pochodzące z rejestru podatkowego). W modelu Chambersa zakłada się, że każda ze zmiennych pomocniczych może być wykorzystana zarówno jako zmienna ‘ x ’, jak i ‘ z ’ (z zastrzeżeniem, że zmienną ‘ z ’ nie może być taka zmienna, która przyjmuje wartości zerowe). W związku z powyższym ostatecznie głębszej analizie poddano podejście, w którym za zmienną ‘ z ’ przyjęto liczbę osób pracujących.

4. Metoda oceny precyzji

Do oceny precyzji i dokładności otrzymanych szacunków wykorzystano metodę bootstrapową. Wykonano 1000 repetycji losowania podprób, na podstawie których oszacowano wartość przychodu przedsiębiorstw dla czerwca 2012 r. w przekroju przyjętych domen studiów. Efektywność estymacji oceniono na podstawie współczynnika zmienności estymatora [Bracha 2004]:

$$CV(\hat{Y}_d) = \frac{\sqrt{Var(\hat{Y}_d)}}{E(\hat{Y}_d)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{999} \sum_{b=1}^{1000} (\hat{Y}_{b,d} - \hat{Y}_d)^2}}{E(\hat{Y}_d)}. \quad (8)$$

Wskaźnik ten określa udział błędu estymacji w wartości szacowanej zmiennej na poziomie domeny. W badaniach prowadzonych przez GUS oraz badaniach empirycznych przyjmuje się, że wyniki szacunków mogą być uznane za wiarygodne, jeżeli wartość CV nie przekracza 10%. Jeśli przyjmuje on wartości z przedziału 10–20%, szacunki należy interpretować ostrożnie. Jeżeli natomiast poziom CV jest wyższy od 20%, oceny estymatorów nie są uznawane za wiarygodne [Ludność... 2013].



Rys. 1. Wartości przychodu przedsiębiorstw w czerwcu i grudniu 2012 r. zarejestrowane na podstawie badania DG-1 oraz zeznań podatkowych w sekcji „przemysł”

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych pochodzących z badania DG-1 oraz rejestrów administracyjnych.

Ocena obciążenia wymaga znajomości wartości szacowanego parametru w populacji generalnej. Ze względu na brak dostępu w badaniu do informacji o tej wielkości oszacowano ją w sposób pośredni, na podstawie danych pochodzących z zeznań podatkowych z grudnia 2012 r. Przyjęto, że relacja przychodu zarejestrowanego w zeznaniach podatkowych dla badanych przedsiębiorstw na poziomie domeny studiów do przychodu określonego na podstawie badania DG-1 jest stała. W celu graficznej prezentacji zależności między wielkościami wykorzystano dane dotyczące sekcji „przemysł” (por. rys. 1). W pozostałych sekcjach PKD relacja między zmiennymi przedstawia się podobnie.

$$\frac{\text{Przychód_RejAd}_{XII 2012}}{\text{Przychód_DG1}_{XII 2012}} = \frac{\text{Przychód_RejAd}_{VI 2012}}{\text{Przychód_DG1}_{VI 2012}}. \quad (9)$$

Takie podejście pozwoliło na wyznaczenie przybliżonej wartości przychodu przedsiębiorstw dla czerwca 2012 r.

5. Wyniki szacunków i ocena ich jakości*

Analizę rozpoczęto od oceny rozkładów przedsiębiorstw według badanych zmiennych. Wartości współczynnika zmienności wahały się w granicach 47–649%. Zanotowano również silną asymetrię, współczynnik asymetrii przyjmował wartości w przedziale 0,6–17,1. Biorąc pod uwagę własności rozkładów podmiotów gospodarczych, za pomocą testów White'a oraz Breuscha-Pagana weryfikacji poddano hipotezę zakładającą homoskedastyczność. Wyniki testów w przypadku zdecydowanej większości wyróżnionych domen potwierdziły słuszność tezy o zmienności składnika losowego (por. tabela 1). To z kolei uzasadniało wykorzystanie opisanych wyżej estymatorów GREG uwzględniających dodatkową cechę 'z'.

Ocenie poddano zarówno efektywność, jak i dokładność estymacji. W ocenie precyzji estymacji za punkt odniesienia przyjęto szacunek otrzymany za pomocą klasycznych, bezpośrednich estymatorów HT oraz typu GREG, włączając w to jego postać ilorazową. Biorąc pod uwagę wartości miary efektywności CV, można zauważyć, że największym zróżnicowaniem charakteryzuje się estymator HT (por. rys. 2–5 i tabela 2). Mniejszą zmienność obserwujemy w przypadku klasycznych estymatorów GREG, w których wykorzystuje się zmienne pomocnicze pochodzące z rejestrów administracyjnych. Analizując wyniki można zauważyć, że precyzja szacunku estymacji typu GREG zależy od liczebności próby. Jest ona z reguły wyższa w sekcjach licznie reprezentowanych w próbie, takich jak handel i przemysł. W większości wyróżnionych domen współczynniki zmienności estymatorów modelu Chambersa kształtują się na podobnym poziomie. Wyjątek stanowi sekcja „transport”, w której liczebność próby jest najmniejsza i wynosi w niektórych domenach 5 jednostek.

W ocenie dokładności szacunku przychodu przedsiębiorstw wykorzystano wartości referencyjne wyznaczone na podstawie zależności ilorazowej opisanej powyżej (por. wzór (9)). Dodatkowo, w celu pełniejszej oceny, model Chambersa porównano z estymacją HT oraz GREG (por. rys. 6–9, tabela 3). Otrzymane wyniki wskazują, że zastosowanie modelu Chambersa w znacznym stopniu poprawiło dokładność szacunku w przypadku estymacji HT i GREG. Zastosowanie estymacji HT w prawie wszystkich badanych domenach doprowadziło do znacznego przeszacowania wartości przychodu. Z kolei w przypadku wszystkich estymatorów typu GREG widoczne jest niedoszacowanie badanego parametru, jednak wielkość odchylenia od wartości referencyjnej jest zdecydowanie mniejsza niż w przypadku estymatora HT. Zastosowanie estymatora GREG, a w szczególności jego zmodyfikowanej wersji, przyniosło największą poprawę dokładności szacunku dla domen, dla których zanotowano największą dyspersję zmiennych uwzględnionych w modelu.

* Wybrane wyniki badań zostały opublikowane w pracy [Dehnel 2017].

Tabela 1. Wartości statystyk testów White'a i Breusch-Pagana na heteroskedastyczność w przekroju województw

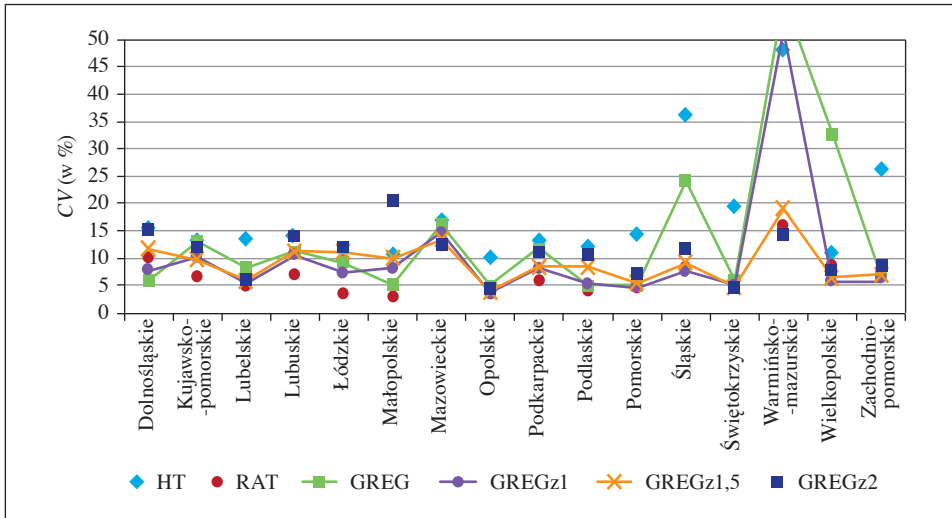
Województwo	Test White'a		Test Breusch-Pagana		Test White'a		Test Breusch-Pagana	
	statystyka	p-wartość	statystyka	p-wartość	statystyka	p-wartość	statystyka	p-wartość
	Przemysł		Budownictwo					
Dolnośląskie	15,28	0,0092	7,75	0,0207	39,93	*	30,4	*
Kujawsko-pomorskie	102	*	97,4	*	6,99	0,2217	0,75	0,6863
Lubelskie	48,04	*	25,31	*	28,92	*	12,14	0,0023
Lubuskie	20,5	0,001	8,87	0,0118	20,7	0,0009	16,63	0,0002
Łódzkie	179,3	*	97,86	*	35,21	*	21,22	*
Małopolskie	90,51	*	89,76	*	14,55	0,0125	9,77	0,0076
Mazowieckie	276,5	*	24,85	*	0,69	0,9835	0,02	0,9922
Opolskie	57,06	*	33,44	*	20,31	0,0011	17,71	0,0001
Podkarpackie	171,3	*	131	*	16,89	0,0047	16,01	0,0003
Podlaskie	41,21	*	28,77	*	11,27	0,0462	4,75	0,0928
Pomorskie	112,4	*	60,2	*	14,69	0,0118	12,28	0,0022
Śląskie	267,8	*	19,2	*	77,15	*	53,72	*
Świętokrzyskie	34,8	*	24,3	*	36,33	*	29,04	*
Warmińsko-mazurskie	125,8	*	14,91	0,0006	5,29	0,3818	3,73	0,1552
Wielkopolskie	101,9	*	89,19	*	81,53	*	6,22	0,0445
Zachodnio-pomorskie	25,87	*	3,83	0,1473	56,92	*	42,71	*

cd. tabeli 1

Województwo	Test White'a		Test Breuscha-Pagana		Test White'a		Test Breuscha-Pagana	
	statystyka	p-wartość	statystyka	p-wartość	statystyka	p-wartość	statystyka	p-wartość
	Handel		Transport		Handel		Transport	
Dolnośląskie	121,9	*	86,7	*	14,63	0,0121	12,9	0,0016
Kujawsko-pomorskie	46,13	*	35,05	*	16,2	0,0063	10,48	0,0053
Lubelskie	49,7	*	1,95	0,3771	2,34	0,7998	0,21	0,9013
Lubuskie	80,34	*	37,33	*	9,48	0,0913	4,16	0,1248
Łódzkie	82,18	*	34,9	*	11,98	0,035	10,06	0,0065
Małopolskie	136,1	*	6,36	0,0417	18,27	0,0026	15,31	0,0005
Mazowieckie	169,7	*	142,6	*	2,11	0,8333	0,5	0,7782
Opolskie	42,65	*	36,43	*	13,18	0,0217	1,86	0,3945
Podkarpackie	33,91	*	18,09	0,0001	8,71	0,1213	5,39	0,0677
Podlaskie	33,33	*	16,64	0,0002	5,63	0,3439	0,72	0,698
Pomorskie	40,15	*	36,32	*	24,63	0,0002	16,54	0,0003
Śląskie	97,41	*	82,98	*	23,18	0,0003	20,51	*
Świętokrzyskie	23,45	0,0003	6,18	0,0456	16,32	0,006	9,04	0,0109
Warmińsko-mazurskie	48,97	*	25,96	*	14,15	0,0147	0,44	0,8013
Wielkopolskie	121,5	*	74,83	*	45,67	*	12,75	0,0017
Zachodniopomorskie	121,1	*	113,9	*	20,77	0,0009	11,41	0,0033

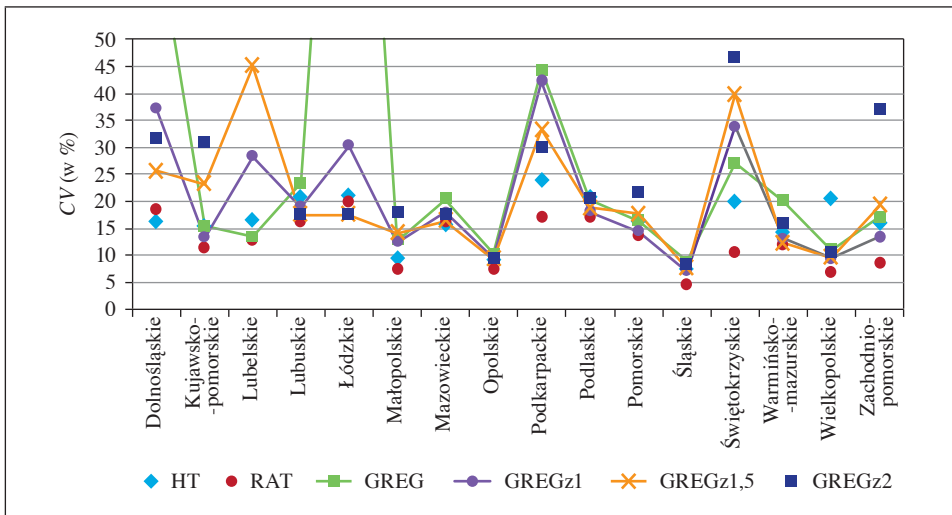
* $p < 0,0001$

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych pochodzących z badania DG-1.



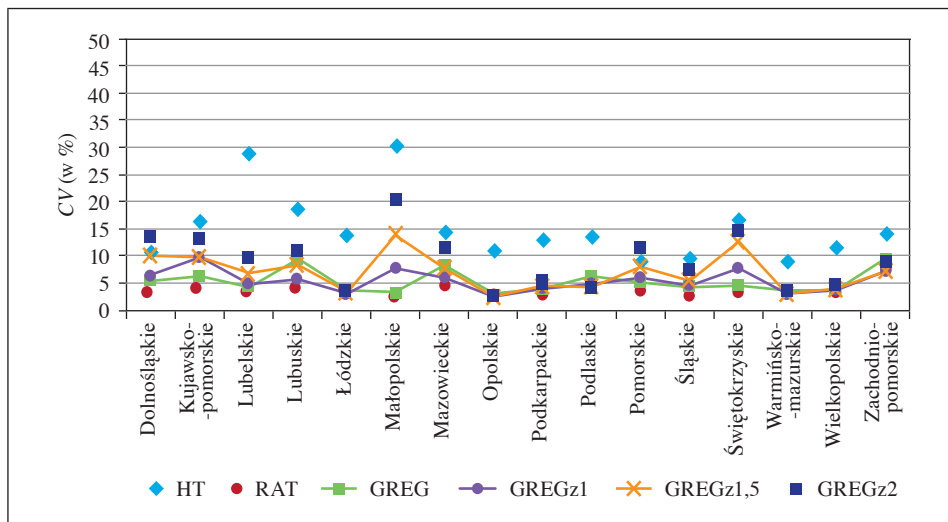
Rys. 2. Precyzja szacunku CV w przekroju województw – przemysł

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych pochodzących z badania DG-1 oraz rejestrów administracyjnych.



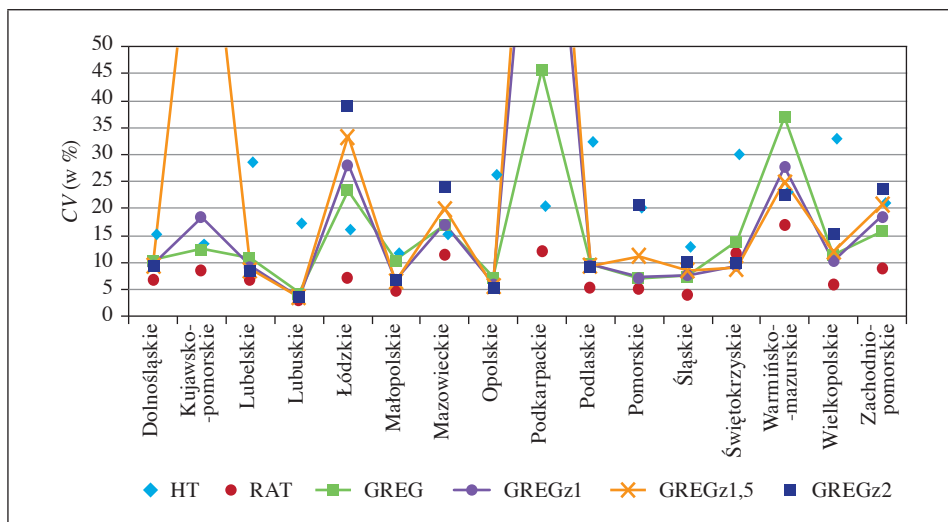
Rys. 3. Precyzja szacunku CV w przekroju województw – budownictwo

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych pochodzących z badania DG-1 oraz rejestrów administracyjnych.



Rys. 4. Precyzja szacunku CV w przekroju województw – handel

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych pochodzących z badania DG-1 oraz rejestrów administracyjnych.



Rys. 5. Precyzja szacunku CV w przekroju województw – transport

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych pochodzących z badania DG-1 oraz rejestrów administracyjnych.

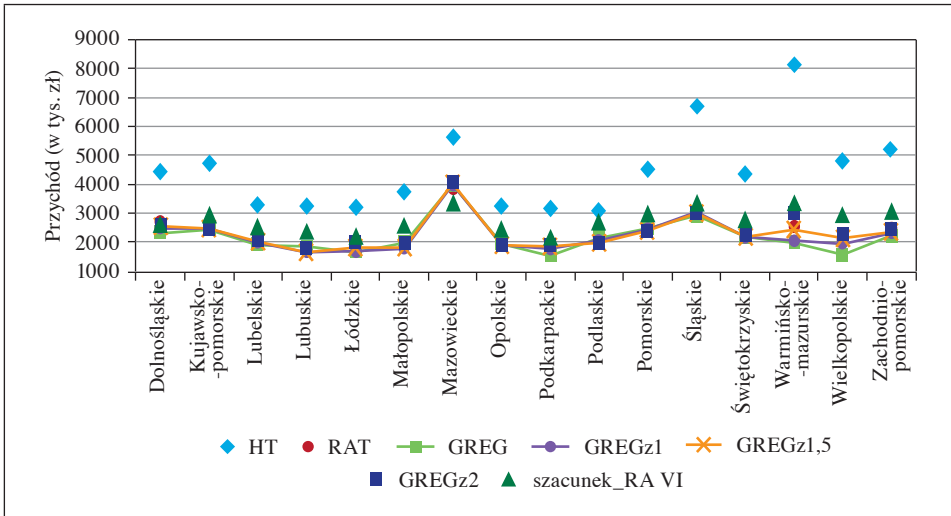
Tabela 2. Precyzja szacunku CV w przekroju województw i czterech sekcji PKD

Województwo	Estymator													
	Przemysł							Budownictwo						
	HT	RAT	GREG	GREGz1	GREGz1,5	GREGz2	HT	RAT	GREG	GREGz1	GREGz1,5	GREGz2		
Dolnośląskie	15,5	9,8	5,8	7,7	11,7	15,1	16,1	18,6	70,3	37,1	25,7	31,6		
Kujawsko-pomorskie	13,2	6,6	13,1	10,2	9,7	11,8	15,3	11,4	15,3	13,2	23,2	31,0		
Lubelskie	13,6	5,0	8,3	5,4	5,9	6,5	16,5	12,7	13,3	28,3	45,1	71,2		
Lubuskie	14,0	6,9	11,3	10,6	11,2	14,0	20,7	16,2	23,4	19,0	17,5	17,7		
Łódzkie	9,8	3,6	9,1	7,3	11,1	11,9	21,0	19,8	151,1	30,2	17,6	17,5		
Małopolskie	10,5	3,0	5,2	8,1	9,9	20,4	9,4	7,5	12,7	12,4	14,1	17,9		
Mazowieckie	16,8	12,4	16,2	14,6	13,3	12,5	15,5	15,8	20,3	17,9	16,3	17,5		
Opolskie	10,1	3,6	5,0	3,6	3,8	4,3	9,2	7,3	10,3	9,4	9,3	9,4		
Podkarpackie	13,0	5,7	11,8	8,2	8,4	11,0	23,9	16,9	44,3	42,2	33,3	30,0		
Podlaskie	12,2	4,4	5,1	5,2	8,3	10,7	20,8	17,1	20,3	18,0	18,8	20,4		
Pomorskie	14,3	4,3	5,0	4,6	5,4	7,1	16,1	13,6	16,4	14,4	17,7	21,4		
Śląskie	36,1	8,2	24,2	7,6	9,1	11,4	7,3	4,6	8,9	7,0	7,5	8,3		
Świętokrzyskie	19,3	4,7	5,8	5,1	4,7	4,5	19,9	10,4	27,0	33,9	39,8	46,7		
Warmińsko-mazurskie	48,1	15,9	57,7	51,8	19,0	14,3	14,0	11,8	20,1	13,2	12,3	16,0		
Wielkopolskie	11,0	8,7	32,8	5,7	6,4	7,8	20,4	6,7	10,9	9,4	9,5	10,5		
Zachodnioporskie	26,1	7,0	6,9	5,8	6,9	8,5	15,7	8,5	17,1	13,3	19,2	36,8		

cd. tabeli 2

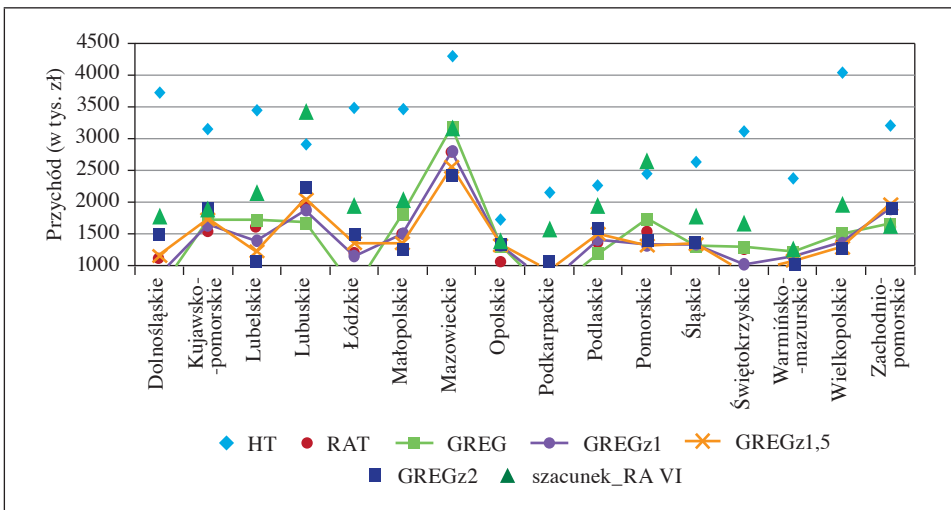
Województwo	Estymator																																								
	Handel							Transport																																	
	HT	RAT	GREG	GREGz1	GREGz1,5	GREGz2	HT	RAT	GREG	GREGz1	GREGz1,5	GREGz2	HT	RAT	GREG	GREGz1	GREGz1,5	GREGz2																							
Dolnośląskie	10,4	3,2	5,4	6,3	10,1	13,3	15,4	6,9	10,5	9,6	13,3	15,4	6,9	10,5	9,6	13,3	15,4	6,9	10,5	9,6	13,3	15,4	6,9	10,5	9,6	13,3	15,4	6,9	10,5	9,6	13,3	15,4	6,9	10,5	9,6	13,3	15,4				
Kujawsko-pomorskie	16,1	4,1	6,2	9,6	9,7	13,1	13,6	8,6	12,5	18,5	13,1	13,6	8,6	12,5	18,5	13,1	13,6	8,6	12,5	18,5	13,1	13,6	8,6	12,5	18,5	13,1	13,6	8,6	12,5	18,5	13,1	13,6	8,6	12,5	18,5	13,1	13,6	8,6	12,5	18,5	
Lubelskie	28,8	3,5	4,3	4,8	6,7	9,6	28,7	6,8	11,0	9,3	9,6	28,7	6,8	11,0	9,3	9,6	28,7	6,8	11,0	9,3	9,6	28,7	6,8	11,0	9,3	9,6	28,7	6,8	11,0	9,3	9,6	28,7	6,8	11,0	9,3	9,6	28,7	6,8	11,0	9,3	9,6
Lubuskie	18,5	3,9	9,5	5,6	8,3	10,9	17,5	3,0	4,4	3,7	10,9	17,5	3,0	4,4	3,7	10,9	17,5	3,0	4,4	3,7	10,9	17,5	3,0	4,4	3,7	10,9	17,5	3,0	4,4	3,7	10,9	17,5	3,0	4,4	3,7	10,9	17,5	3,0	4,4	3,7	
Łódzkie	13,6	3,3	3,7	3,0	3,2	3,4	16,2	7,4	23,4	28,2	3,4	16,2	7,4	23,4	28,2	3,4	16,2	7,4	23,4	28,2	3,4	16,2	7,4	23,4	28,2	3,4	16,2	7,4	23,4	28,2	3,4	16,2	7,4	23,4	28,2	3,4	16,2	7,4	23,4	28,2	
Małopolskie	30,2	2,4	3,2	7,6	13,9	19,8	11,9	5,0	10,5	6,8	13,9	19,8	11,9	5,0	10,5	6,8	13,9	19,8	11,9	5,0	10,5	6,8	13,9	19,8	11,9	5,0	10,5	6,8	13,9	19,8	11,9	5,0	10,5	6,8	13,9	19,8	11,9	5,0	10,5	6,8	13,9
Mazowieckie	14,2	4,3	8,1	6,0	7,6	11,3	15,4	11,5	17,1	17,1	7,6	11,3	15,4	11,5	17,1	17,1	7,6	11,3	15,4	11,5	17,1	17,1	7,6	11,3	15,4	11,5	17,1	17,1	7,6	11,3	15,4	11,5	17,1	17,1	7,6	11,3	15,4	11,5	17,1		
Opolskie	10,7	2,5	2,9	2,4	2,4	2,5	26,4	5,4	7,2	6,1	2,4	26,4	5,4	7,2	6,1	2,4	26,4	5,4	7,2	6,1	2,4	26,4	5,4	7,2	6,1	2,4	26,4	5,4	7,2	6,1	2,4	26,4	5,4	7,2	6,1	2,4	26,4	5,4	7,2		
Podkarpackie	12,7	2,7	3,8	4,0	4,4	5,3	20,6	12,2	45,8	108,5	4,4	20,6	12,2	45,8	108,5	4,4	20,6	12,2	45,8	108,5	4,4	20,6	12,2	45,8	108,5	4,4	20,6	12,2	45,8	108,5	4,4	20,6	12,2	45,8	108,5	4,4	20,6	12,2	45,8		
Podlaskie	13,4	4,8	6,2	4,7	4,2	4,1	32,6	5,5	9,8	9,6	4,2	32,6	5,5	9,8	9,6	4,2	32,6	5,5	9,8	9,6	4,2	32,6	5,5	9,8	9,6	4,2	32,6	5,5	9,8	9,6	4,2	32,6	5,5	9,8	9,6	4,2	32,6	5,5	9,8		
Pomorskie	8,8	3,2	5,1	5,9	7,9	11,5	20,2	5,5	7,1	7,3	7,9	20,2	5,5	7,1	7,3	7,9	20,2	5,5	7,1	7,3	7,9	20,2	5,5	7,1	7,3	7,9	20,2	5,5	7,1	7,3	7,9	20,2	5,5	7,1	7,3	7,9	20,2	5,5	7,1		
Śląskie	9,5	2,7	4,2	4,5	5,4	7,8	13,1	4,2	7,6	7,8	5,4	13,1	4,2	7,6	7,8	5,4	13,1	4,2	7,6	7,8	5,4	13,1	4,2	7,6	7,8	5,4	13,1	4,2	7,6	7,8	5,4	13,1	4,2	7,6	7,8	5,4	13,1	4,2	7,6		
Świętokrzyskie	16,5	3,1	4,4	7,7	12,5	14,6	30,2	11,9	13,9	9,5	12,5	30,2	11,9	13,9	9,5	12,5	30,2	11,9	13,9	9,5	12,5	30,2	11,9	13,9	9,5	12,5	30,2	11,9	13,9	9,5	12,5	30,2	11,9	13,9	9,5	12,5	30,2	11,9	13,9		
Warmińsko-mazurskie	9,0	2,9	3,5	2,9	3,0	3,3	23,2	17,0	37,0	27,8	3,0	23,2	17,0	37,0	27,8	3,0	23,2	17,0	37,0	27,8	3,0	23,2	17,0	37,0	27,8	3,0	23,2	17,0	37,0	27,8	3,0	23,2	17,0	37,0	27,8	3,0	23,2	17,0	37,0		
Wielkopolskie	11,3	3,2	3,6	3,6	3,8	4,4	33,2	6,0	11,5	10,4	3,8	33,2	6,0	11,5	10,4	3,8	33,2	6,0	11,5	10,4	3,8	33,2	6,0	11,5	10,4	3,8	33,2	6,0	11,5	10,4	3,8	33,2	6,0	11,5	10,4	3,8	33,2	6,0	11,5		
Zachodniopomorskie	14,0	7,3	9,4	7,1	7,1	8,7	21,2	9,2	15,9	18,6	7,1	21,2	9,2	15,9	18,6	7,1	21,2	9,2	15,9	18,6	7,1	21,2	9,2	15,9	18,6	7,1	21,2	9,2	15,9	18,6	7,1	21,2	9,2	15,9	18,6	7,1	21,2	9,2	15,9		

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych pochodzących z badania DG-1 oraz rejestrów administracyjnych.



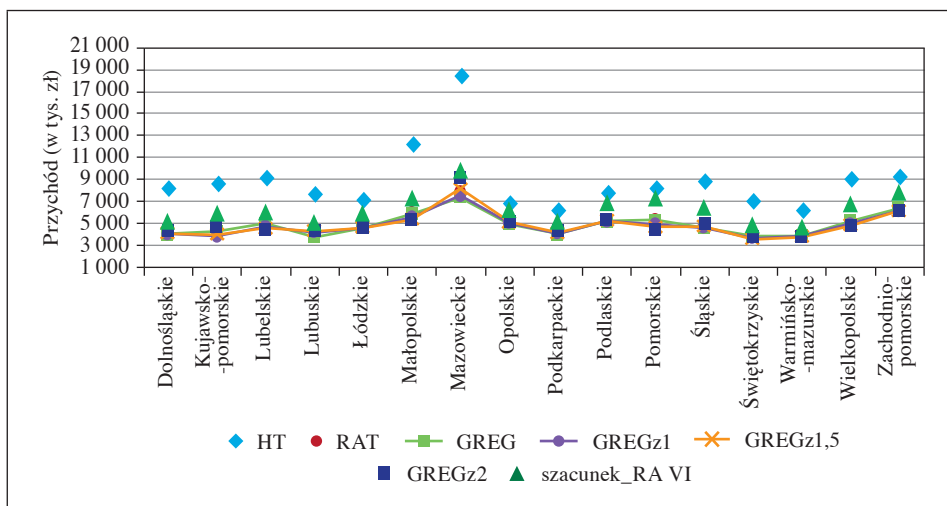
Rys. 6. Szacunek przychodu przedsiębiorstw dla czerwca 2012 r. w przekroju województw – przemysł

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych pochodzących z badania DG-1 oraz rejestrów administracyjnych.



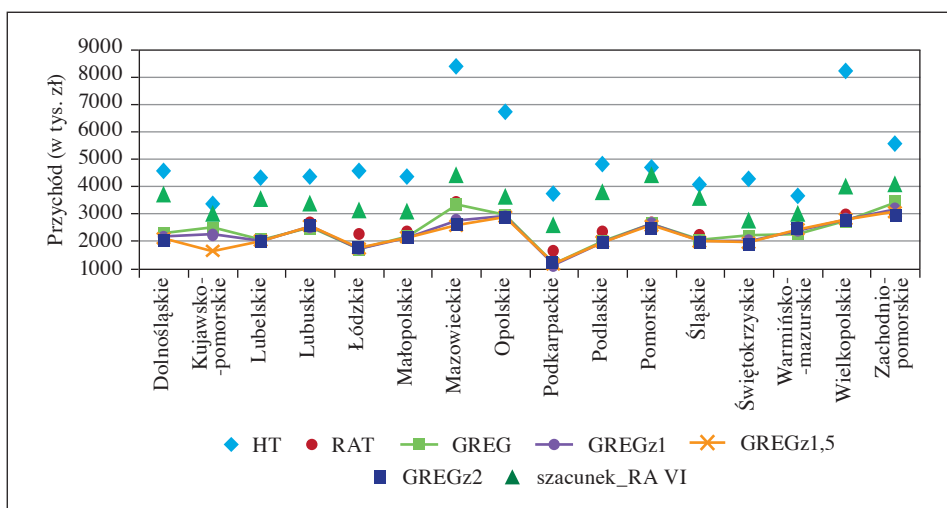
Rys. 7. Szacunek przychodu przedsiębiorstw dla czerwca 2012 r. w przekroju województw – budownictwo

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych pochodzących z badania DG-1 oraz rejestrów administracyjnych.



Rys. 8. Szacunek przychodu przedsiębiorstw dla czerwca 2012 r. w przekroju województw – handel

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych pochodzących z badania DG-1 oraz rejestrów administracyjnych.



Rys. 9. Szacunek przychodu przedsiębiorstw dla czerwca 2012 r. w przekroju województw – transport

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych pochodzących z badania DG-1 oraz rejestrów administracyjnych.

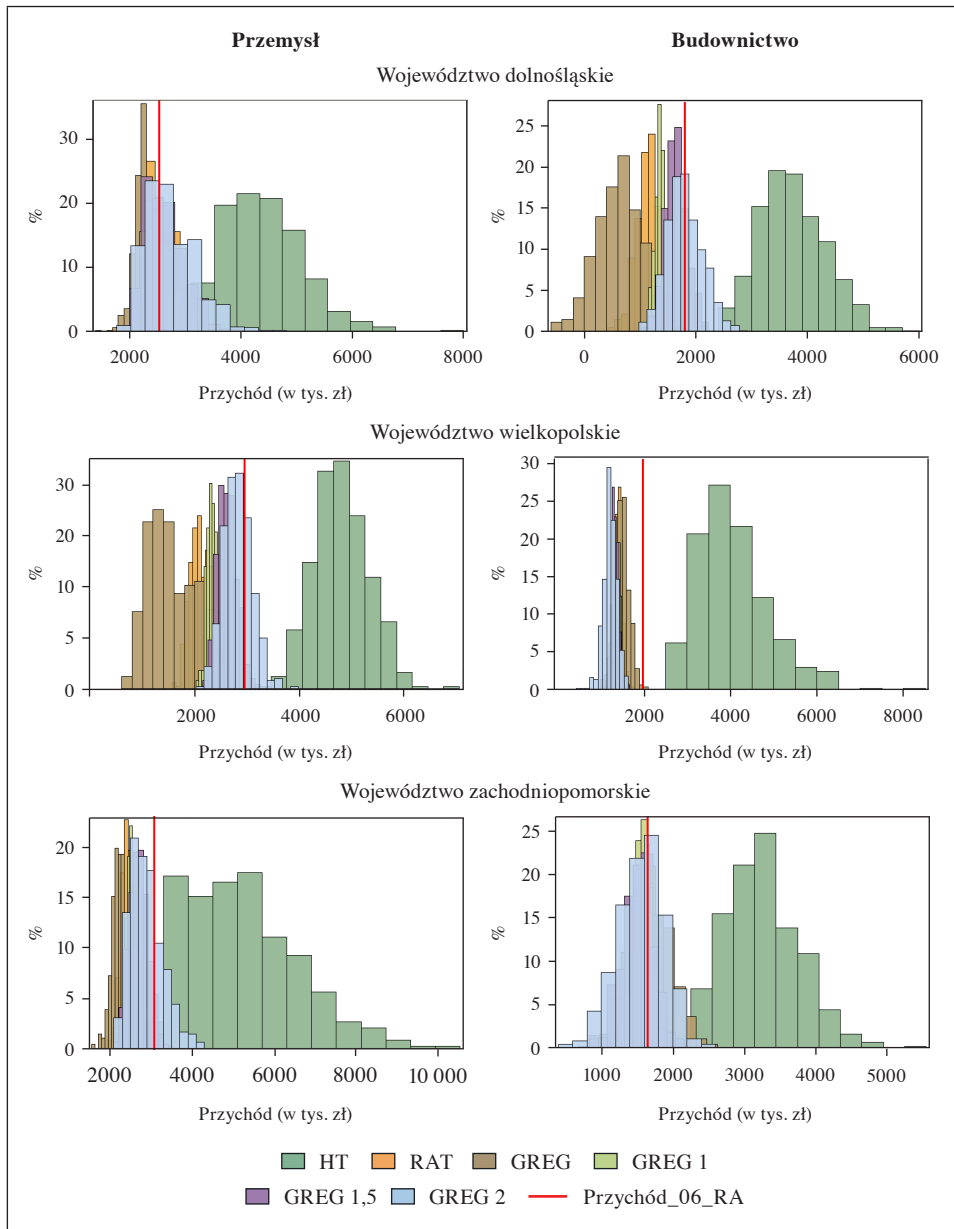
Tabela 3. Szacunek przychodu przedsiębiorstw dla czerwca 2012 r. w przekroju województw i czterech sekcji PKD (w tys. zł)

Województwo	Estymator											
	Przemysł						Budownictwo					
	HT	RAT	GREG	GREGz1	GREGz1,5	GREGz2	HT	RAT	GREG	GREGz1	GREGz1,5	GREGz2
Dolnośląskie	4437	2680	2300	2489	2570	2621	3731	1110	561	841	1200	1536
Kujawsko-pomorskie	4706	2510	2430	2477	2538	2584	3169	1653	1860	1736	2152	2811
Lubelskie	3291	2064	1901	1973	2022	2075	3451	1676	1748	1366	1147	928
Lubuskie	3227	1829	1846	1631	1668	1884	2953	2041	1657	1899	2126	2373
Łódzkie	3194	1778	1632	1694	1937	2116	3518	1199	512	1202	1454	1575
Małopolskie	3694	2024	1980	1748	1785	2024	3488	1564	1848	1484	1299	1145
Mazowieckie	5584	3911	4232	4243	4248	4178	4296	2918	3272	2771	2511	2390
Opolskie	3199	1925	1946	1903	1894	1893	1735	1087	1350	1371	1381	1386
Podkarpackie	3126	1683	1503	1780	1875	1859	2173	958	664	907	1104	1283
Podlaskie	3056	2173	2164	2021	1952	1955	2284	1407	1222	1445	1547	1640
Pomorskie	4511	2513	2475	2430	2371	2316	2457	1591	1786	1310	1333	1481
Śląskie	6814	2923	2533	3004	3064	3097	2654	1392	1311	1381	1424	1468
Świętokrzyskie	4318	2215	2168	2177	2188	2202	3142	1263	1267	931	792	715
Warmińsko-mazurskie	8222	2364	1580	1609	2247	3218	2387	1217	1314	1162	1063	1011
Wielkopolskie	4784	2028	1372	1933	2121	2268	4015	1433	1508	1359	1272	1220
Zachodnioporskie	5129	2452	2186	2280	2308	2318	3251	1651	1772	2024	2033	1679

cd. tabeli 3

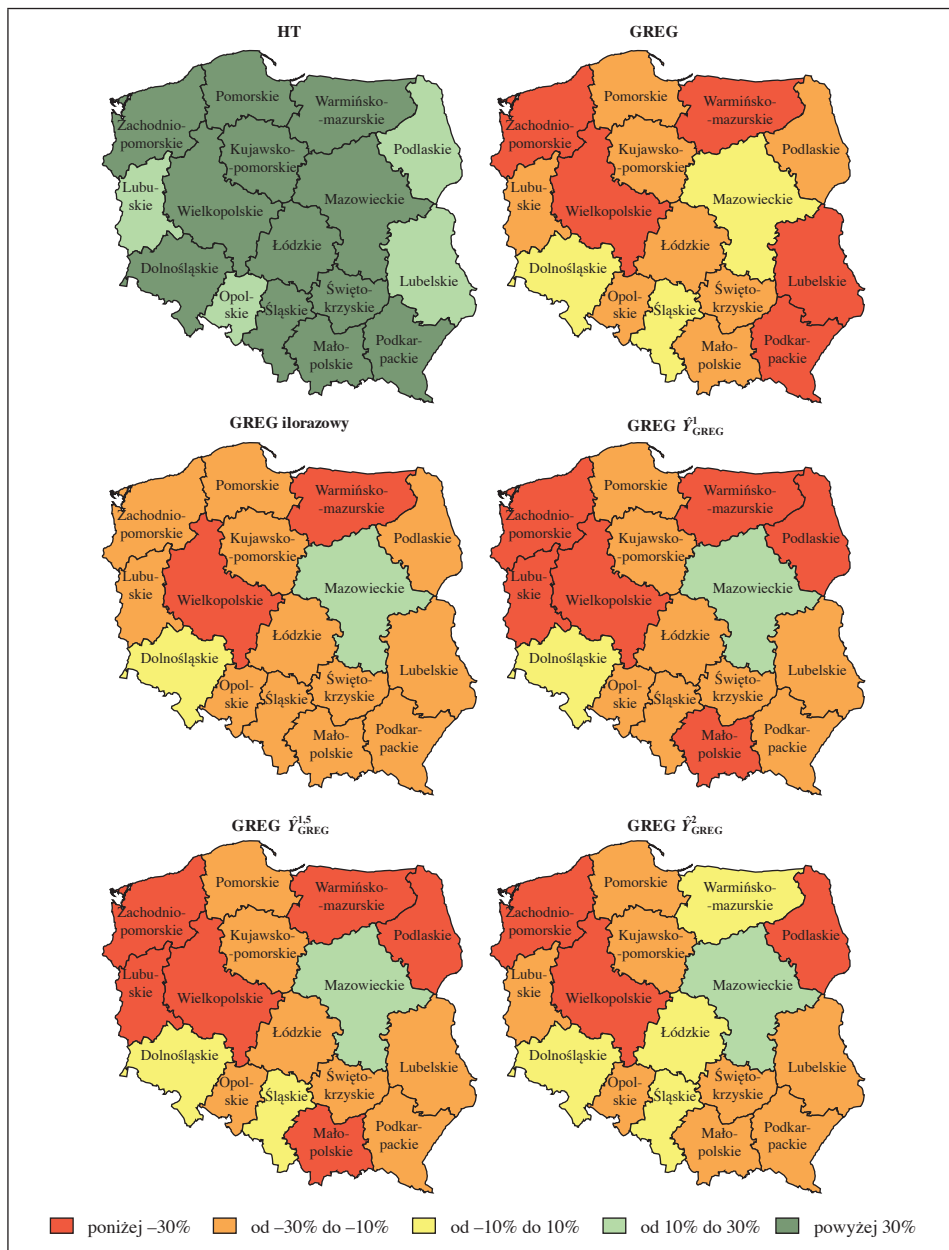
Województwo	Estymator													
	Handel							Transport						
	HT	RAT	GREG	GREGz1	GREGz1,5	GREGz2	HT	RAT	GREG	GREGz1	GREGz1,5	GREGz2		
Dolnośląskie	8285	4295	3999	3961	4032	4240	4742	2207	2295	2149	2096	2083		
Kujawsko-pomorskie	8761	4477	4217	3711	3942	4945	3509	2396	2498	2180	1249	1804		
Lubelskie	9316	4942	4974	4711	4495	4287	4418	2079	2090	2038	2031	2035		
Lubuskie	7896	4257	3658	4216	4357	4564	4527	2656	2498	2530	2546	2560		
Łódzkie	7273	4685	4582	4562	4547	4562	4705	2267	1731	1744	1788	1859		
Małopolskie	12448	5940	5907	5576	5389	5286	4502	2405	2231	2168	2156	2147		
Mazowieckie	18637	7953	7451	7511	8245	9422	8559	3434	3349	2704	2524	2660		
Opolskie	6949	5056	4898	5020	5070	5101	6915	2918	2916	2886	2876	2871		
Podkarpackie	6277	4147	4019	4085	4181	4297	3868	1623	1059	637	586	589		
Podlaskie	7959	5237	5136	5201	5252	5328	5005	2358	2001	1978	1978	1987		
Pomorskie	8339	5325	5280	4856	4544	4237	4891	2702	2621	2638	2557	2394		
Śląskie	8979	4779	4566	4550	4763	5289	4216	2242	2014	1979	1979	2025		
Świętokrzyskie	7094	3913	3790	3528	3480	3847	4563	1988	2273	2034	1956	1899		
Warmińsko-mazurskie	6320	3884	3863	3805	3755	3691	3782	2498	2142	2383	2439	2472		
Wielkopolskie	9175	5282	5240	4960	4800	4750	8274	3080	2832	2848	2769	2635		
Zachodniopomorskie	9354	6365	6551	6121	6123	6202	5705	2982	3523	3192	3032	2887		

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych pochodzących z badania DG-1 oraz rejestrów administracyjnych.



Rys. 10. Rozkład szacunków dla wybranych województw – przemysł i budownictwo

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych pochodzących z badania DG-1 oraz rejestrów administracyjnych.



Rys. 11. Porównanie względnego obciążenia szacunku przychodów przedsiębiorstw na podstawie estymatorów HT oraz typu GREG w województwach – przemysł

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych pochodzących z badania DG-1 oraz rejestrów administracyjnych.

Na rys. 10 przedstawiono histogramy prezentujące rozkłady szacunków otrzymanych na podstawie badanych estymatorów metodą bootstrap dla sekcji „przemysł” i „budownictwo” dla wybranych województw. Estymatory GREG, w których wykorzystano zmienne pomocnicze pochodzące z rejestrów, charakteryzują się zdecydowanie mniejszym obciążeniem szacunków. W ich przypadku widoczna jest wyraźna koncentracja rozkładów wokół wartości referencyjnej oznaczonej czerwoną linią.

W celu przestrzennego zobrazowania rozbieżności pomiędzy oszacowaniami i wartościami rzeczywistymi sporządzono wykresy mapowe ukazujące nasilenie obciążenia w przekroju wszystkich województw (por. rys. 11). Wyniki przeprowadzonego badania wskazują, że w zdecydowanej większości domen oceny estymatorów otrzymane na podstawie estymatora HT są przeszacowane w porównaniu z wartościami zawartymi w rejestrach administracyjnych. Największe rozbieżności widoczne są w przypadku estymatora HT. Zastosowanie estymacji typu GREG wpłynęło na zmniejszenie obciążenia, jednak zakres poprawy był zróżnicowany. Na różnice miał wpływ nie tylko rodzaj estymatora GREG, ale również badana domena.

6. Wnioski

Otrzymane wyniki badań pozwalają na sformułowanie następujących wniosków:

- włączenie do szacunku zmiennych pomocniczych w ramach estymacji GREG wpłynęło na znaczną poprawę precyzji w porównaniu z estymacją HT,
- w przypadku zastosowania metody nieklasycznej większą poprawę obserwujemy dla domen charakteryzujących się znacznym zróżnicowaniem i silną asymetrią zarówno jeśli chodzi o precyzję, jak i dokładność szacunku,
- w badaniu biorą udział jedynie jednostki, dla których zmienna ‘z’ jest różna od 0; oznacza to, że w badaniu za zmienną ‘z’ można przyjąć jedynie cechę, która nie przyjmuje wartości zerowych,
- stopień poprawy precyzji estymacji w przypadku estymatorów uwzględniających transformację uzależniony jest od odpowiedniego doboru wartości parametru γ . Znaczną poprawę można osiągnąć, dobierając do danej domeny odpowiedni model. Postępowanie takie powoduje jednak, że stosowanie przedstawionych w artykule zmodyfikowanych estymatorów GREG w przypadku dużej liczby małych domen jest czasochłonne i znacznie utrudnione.

Literatura

Bracha C. [2004], *Estymacja danych z badania aktywności ekonomicznej ludności na poziomie powiatów dla lat 1995–2002*, GUS, Warszawa.

- Chambers R., Chandra H., Salvati N., Tzavidis N. [2014], *Outlier Robust Small Area Estimation*, „Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)”, vol. 76, no 1, <https://doi.org/10.1111/rssb.12019>.
- Chambers R.L., Falvey H., Hedlin D., Kocic P. [2001], *Does the Model Matter for GREG Estimation? A Business Survey Example*, „Journal of Official Statistics”, vol. 17, nr 4.
- Clark R.G., Kocic P., Smith P.A. [2017], *A Comparison of Two Robust Estimation Methods for Business Surveys*, „International Statistical Review”, vol. 85, nr 2, <https://doi.org/10.1111/insr.12177>.
- Dehnel G. [2014], *Winsorization Methods in Polish Business Survey*, „Statistics in Transition – New Series”, vol. 15, nr 1.
- Dehnel G. [2016], *M-estimators in Business Statistics*, „Statistics in Transition – New Series”, vol. 17, nr 4.
- Dehnel G. [2017], *GREG Estimation with Reciprocal Transformation for a Polish Business Survey* [w:] *Proceedings of the 11th Professor Aleksander Zelias International Conference on Modelling and Forecasting of Socio-Economic Phenomena*, eds M. Papież, S. Śmiech, Foundation of the Cracow University of Economics, Cracow.
- Lehtonen R., Särndal C.E., Veijanen A. [2016], *Generalized Regression and Model-calibration Estimation for Domains: Accuracy Comparison*, https://www.researchgate.net/publication/228665672_Generalized_regression_and_model-calibration_estimation_for_domains_Accuracy_comparison (data dostępu: 17.12.2017).
- Ludność. Stan i struktura demograficzno-społeczna. Narodowy Spis Powszechny Ludności i Mieszkań 2011* [2013], GUS, Warszawa.
- Rao J.N.K., Molina I. [2015], *Small Area Estimation*, 2nd ed., Wiley Series in Survey Methodology, Wiley, Hoboken, New Jersey.
- Särndal C.E., Swensson B., Wretman J. [1992], *Model Assisted Survey Sampling*, Springer Verlag, New York.
- Wykorzystanie danych administracyjnych w badaniu: Ocena bieżącej działalności gospodarczej przedsiębiorstw* [2016], GUS, Warszawa.

Model Selection and the GREG Estimator Bias in a Small Business Survey

(Abstract)

Estimation for a very skewed population containing extreme values is problematic, especially at a low level of aggregation. Traditional direct estimation methods do not provide satisfactory results. The growing demand for detailed information and the wider possibility of using data from administration registers has increased the importance of recognising more sophisticated estimation methods. Generalised Regression (GREG) estimation is an example of one such type. The paper examines the importance of the model chosen in GREG estimation in dealing with highly variable and outlier-prone populations. The model-assisted GREG estimator is applied to a real business survey. Lagged variables from administrative registers were used as the auxiliary variables. The variable of interest – mean revenue of small companies – was estimated for provinces cross-classified by categories of economic activity.

Keywords: GREG, business statistics, model-assisted estimation, outliers.

| *Marcin Salamaga*

| Identyfikacja wzorców konsolidacji fiskalnej na przykładzie krajów Unii Europejskiej*

Streszczenie

Konsolidacja fiskalna polega na działaniach zmierzających do zrównoważenia dochodów i wydatków w budżecie państwa. Można to osiągnąć, ograniczając wydatki publiczne bądź podnosząc podatki. Konsolidacja fiskalna ma istotne konsekwencje makroekonomiczne w długim i krótkim okresie. Celem artykułu jest określenie wzorców konsolidacji fiskalnej w krajach Unii Europejskiej, do czego zastosowano wielowymiarowe metody statystyczne: analizę korespondencji i analizę skupień. Dodatkowo przeanalizowano efekty makroekonomiczne konsolidacji fiskalnej. W badaniach wykorzystano dane pochodzące z Eurostatu.

Słowa kluczowe: konsolidacja fiskalna, finanse publiczne, analiza korespondencji, analiza skupień.

Klasyfikacja JEL: E62, C38.

1. Wprowadzenie

Dług publiczny i deficyt budżetowy występują stale w wielu gospodarkach świata. Deficyt budżetowy powstaje, jeśli wydatki w budżecie państwa są wyższe

Marcin Salamaga, Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Zarządzania, Katedra Statystyki, ul. Rakowicka 27, 31-510 Kraków, e-mail: salamaga@uek.krakow.pl

* Artykuł powstał w wyniku realizacji projektu finansowanego ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji nr DEC-2013/11/B/HS4/01083.

niż dochody budżetowe w okresie rozliczeniowym (np. roku budżetowym). Deficyt budżetowy zwykle planuje się na etapie przygotowywania ustawy budżetowej, ale może on wystąpić w trakcie jej realizacji na skutek błędnych prognoz, nieprzewidzianych wydatków itp. [Ciak 2002]. Z kolei dług publiczny jest zaciągany w następstwie utrzymującego się w kolejnych latach deficytu fiskalnego, na pokrycie którego skarb państwa i jednostki samorządowe zaciągają pożyczki i kredyty, emitują obligacje czy bony skarbowe. Zadłużanie państwa umożliwia prowadzenie elastycznej polityki wydatkowej i często jest konieczne do zrealizowania zadań stojących przed administracją rządową i samorządową, gdy dochody budżetowe pochodzące z podatków są niewystarczające. Jeśli dług i deficyt fiskalny nie są relatywnie duże, nie wykazują tendencji do dalszego pogłębiania się, a gospodarki krajów mają odpowiedni potencjał i strukturę, to zjawiska te nie muszą stanowić realnego zagrożenia dla stabilności finansów państwa. Z jednej strony, zaciąganie długu publicznego, jeśli jest powiązane z finansowaniem polityki prorozwojowej, proinwestycyjnej, może przyczyniać się do wzrostu gospodarczego, z drugiej strony, deficyt budżetowy może prowadzić do wywierania presji w zakresie podnoszenia stóp procentowych, co często stanowi hamulec wzrostu gospodarczego. Ekonomiści są jednak zgodni, że długotrwałe i znaczne zadłużenie państwa powiązane z wysokim i długo utrzymującym się deficytem fiskalnym ma negatywne skutki dla gospodarki, wiąże się m.in z ryzykiem zmniejszenia krajowych oszczędności, wzrostem prawdopodobieństwa inflacji czy możliwością wywołania kryzysu walutowego [Moździerz 2016]. Dla inwestorów długotrwały deficyt budżetowy oznacza najczęściej pogorszenie klimatu gospodarczego oraz wzrost ryzyka inwestycyjnego i niepewności.

Z uwagi na zagrożenia wynikające z nadmiernego zadłużenia i deficytu fiskalnego Unia Europejska w ramach kryteriów z Maastricht wprowadziła dopuszczalny poziom zadłużenia publicznego, wynoszący 60% PKB, oraz dopuszczalny poziom deficytu budżetowego, wynoszący 3% PKB [Michalczyk 2013]. Rozwiązaniem problemu nadmiernego zadłużenia państwa i wysokiego deficytu budżetowego jest konsolidacja finansów publicznych.

Ekonomiści nie są jednomyślni odnośnie do tego, na czym właściwie polega konsolidacja oraz w jaki sposób mierzyć jej efekty i skuteczność. W szerokim rozumieniu jest to zespół działań podejmowanych w ramach prowadzonej polityki fiskalnej, których celem jest uzyskanie wewnętrznej spójności systemu finansów publicznych [Moździerz 2016]. Według OECD konsolidacja fiskalna polega z kolei na działaniach zmierzających do zrównoważenia dochodów i wydatków w budżecie państwa. Można to osiągnąć poprzez ograniczanie wydatków publicznych bądź podnoszenie podatków. Konsolidacja fiskalna jest przedmiotem badań mających na celu ustalenie, gdzie i jak przebiegały procesy konsolidacyjne, jakie są ich efekty oraz jakie czynniki decydują o skuteczności wdrożenia tych

procesów. Wykorzystuje się do tego zarówno prostą analizę zmian wydatków i dochodów budżetowych, salda budżetowego i długu publicznego [Devries i in. 2001, Moździerz 2016, Ziółkowska 2016], jak i narzędzia ekonometryczne, np. modele regresji, w tym modele logitowe, probitowe [Giavazzi, Jappelli i Pagano 2000; Misztal 2011; Kaplanoglou, Rapanos i Bardakas 2013; Beetsma i in. 2015], modele VAR [Estevão i Samake 2013] oraz analizę przeżycia [Molnár 2012]. Chociaż w niektórych pracach wspomina się o wzorcach konsolidacji fiskalnej, to jednak trudno znaleźć w literaturze przedmiotu opis kompleksowego podejścia do tego zagadnienia. Celem tego opracowania jest wskazanie wzorców konsolidacji fiskalnej w krajach UE za pomocą metod wielowymiarowej analizy statystycznej. Do wykrycia ich wykorzystano analizę korespondencji i analizę skupień. Przeanalizowano także efekty makroekonomiczne konsolidacji fiskalnej.

Otrzymane wyniki mogą posłużyć do sformułowania rekomendacji dla krajów UE w zakresie polityki fiskalnej, których wdrożenie może poprawić kondycję krajowych finansów publicznych lub przynajmniej częściowo zapobiec dalszemu pogłębianiu nierównowagi budżetowej. W obliczeniach wykorzystano dane Eurostatu o strukturze wydatków budżetowych krajów UE w latach 2001–2015 (<http://ec.europa.eu/eurostat/data/database>, data dostępu: 10.04.2017).

2. Metoda badania

Trwają dyskusje dotyczące koncepcji konsolidacji finansów publicznych. Przedmiotem sporu są m.in. kwestie wyboru strategii konsolidacji, jej pomiaru, określenia momentu rozpoczęcia konsolidacji i czasu, który jest potrzebny do przeprowadzenia tego procesu, a także oceny jego skuteczności. W konsekwencji w literaturze przedmiotu można znaleźć wiele definicji konsolidacji [Moździerz 2016]. Wybór jednej z nich determinuje zastosowanie określonych narzędzi realizacji procesu konsolidacji oraz metody pomiaru jego efektów. Komisja Europejska przez konsolidację fiskalną rozumie np. poprawę salda budżetowego na skutek użycia narzędzi dyskrecjonalnej polityki fiskalnej [Report... 2014]. Zgodnie z inną koncepcją konsolidacja następuje wówczas, gdy dochodzi do trwałego spadku relacji długu publicznego do PKB [Almeida i in. 2013]. Przedmiotem rozważań jest także wybór strategii konsolidacji i określenie czasu trwania tego procesu. Działania mające na celu poprawienie stanu finansów publicznych powinny dotyczyć sfery wpływów do budżetu, wydatków lub obejmować operacje w obu tych zakresach. Wybór strategii konsolidacyjnej oraz czas trwania procesu konsolidacji fiskalnej wywołują określone skutki makroekonomiczne: w krótkim okresie należy się spodziewać wyraźnego oddziaływania na popyt, w dłuższym – na potencjalny PKB [Moździerz 2016]. Długość i tempo procesu konsolidacji

powinny zależeć od sytuacji gospodarczej kraju, w którym jest on przeprowadzany, trudno więc sformułować uniwersalne wytyczne w tym zakresie.

Z uwagi na różnorodne ujęcia zagadnienia konsolidacji w literaturze przedmiotu w niniejszych badaniach przyjęto, że efekt konsolidacji fiskalnej występuje, jeśli przynajmniej w trzech kolejnych latach następuje redukcja wydatków budżetowych i (lub) wzrost wpływów podatkowych¹ w relacji do PKB. Zmiany wydatków budżetowych i wpływów podatkowych mierzono w punktach procentowych PKB. Przyjęcie trzyletniego okresu pomiaru miało pozwolić na uchwycenie trwałości i ciągłości działań w zakresie polityki fiskalnej służących poprawie stanu finansów publicznych. Należy jednak mieć na uwadze, że zmiany we wpływach i wydatkach budżetowych mogą odzwierciedlać nie tylko zamierzone działania, lecz mogą w pewnym zakresie mieć także inne przyczyny, mogą być np. spowodowane wahaniami koniunktury gospodarczej.

Niemniej jednak pomiar efektów budżetowych w relacji do PKB w ciągu trzech następujących po sobie lat powinien zagwarantować wyeliminowanie lub przynajmniej ograniczenie wpływu epizodycznych zmian o znamionach konsolidacji na wyniki analizy, umożliwiając ograniczenie jej zakresu tylko do monitorowania skutków długofalowej polityki mającej na celu zwiększenie dyscypliny budżetowej. Działania konsolidacyjne rozpatrywano w ujęciu rodzajowym (w odniesieniu do poszczególnych grup wydatków i podatków) oraz w ujęciu całościowym (całkowitych wydatków i dochodów). W badaniu wzięto pod uwagę następujące grupy wydatków publicznych odnotowanych w bazie Eurostatu (w nawiasach podano skróty, które będą wykorzystywane w dalszej części opracowania):

- wydatki na usługi publiczne (usl),
- wydatki na obronę (obr),
- wydatki na zamówienia publiczne i bezpieczeństwo (bez),
- wydatki na gospodarkę (gos),
- wydatki na ochronę środowiska (osr),
- wydatki na mieszkalnictwo (mie),
- wydatki na ochronę zdrowia (zdr),
- wydatki na kulturę i rekreację (kul),
- wydatki na edukację (edu),
- wydatki na zabezpieczenia społeczne (soc),

¹ Wielkość wpływów podatkowych jest przede wszystkim funkcją stopy podatkowej, ale wynika także z innych działań, np. uszczelnienia czy rozszczelnienia systemu ściągania podatków, co też jest elementem polityki fiskalnej. W artykule przyjęto pewne uproszczenie terminologiczne i wpływy podatkowe (w relacji do PKB) nazwano podatkami.

i podatków budżetowych:

- podatek VAT (vat),
- podatek od produkcji i importu (ppr),
- podatek dochodowy (pdo),
- składki na ubezpieczenia społeczne (ube).

Analizowano liczbę konsolidacji prowadzonych w latach 2001–2015 w każdym z krajów UE zarówno w zakresie wydatków i podatków w obrębie powyższych grup, jak i w ujęciu całościowym. Następnie przygotowano tabelę kontyngencji zawierającą częstości występowania krajów UE i stosowanych przez nie zabiegów konsolidacji finansów publicznych. Pozwoliło to na wykorzystanie analizy korespondencji [Greenacre 1993, Błasius 2001, Stanimir 2005] do badania współwystępowania krajów UE i intensywności stosowania procesów konsolidacyjnych w zakresie różnych grup wydatkowych i podatkowych. Dzięki temu możliwe stało się określenie działań konsolidacyjnych (podnoszenie różnych rodzajów podatków, obniżanie wydatków budżetowych) najbardziej charakterystycznych dla poszczególnych krajów UE, a zatem wyodrębnienie pewnych profili konsolidacji fiskalnej w Europie. Zaletą zastosowania analizy korespondencji jest możliwość wizualizacji rzutowania punktów reprezentujących obiekty i charakteryzujące je kategorie cech, co ułatwia interpretację wyników. Wymiar przestrzeni rzutowania punktów w analizie korespondencji określono za pomocą kryterium osypiska [Clausen 1998].

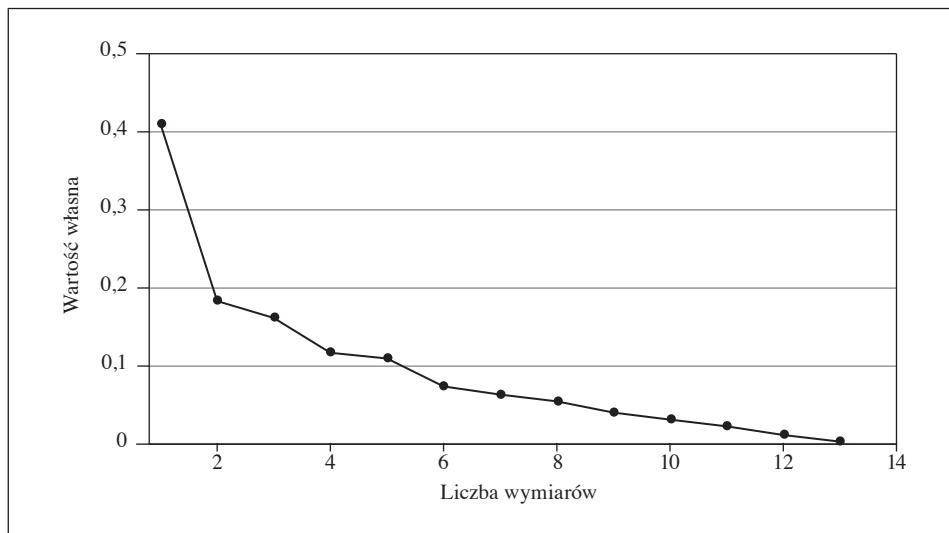
Ważnym zagadnieniem jest także ocena skuteczności konsolidacji finansów publicznych. W literaturze przedmiotu proponowane są różne metody oceny skuteczności konsolidacji w zależności od przyjętej definicji konsolidacji. Komisja Europejska uznaje, że konsolidacja się powiodła, gdy w ciągu trzech lat od jej zakończenia skumulowany cyklicznie dostosowany deficyt pierwotny (CAPB) nie pogorszy się w danym kraju o więcej niż 0,75% PKB w stosunku do wartości odnotowanej w roku ukończenia konsolidacji [*Public...* 2007]. Z kolei według A.F. Alesiny i S. Ardagni [2009] konsolidacja jest udana, jeśli wartość skumulowana relacji długu publicznego do PKB z trzech lat po zakończeniu procesu konsolidacji ulegnie poprawie o przynajmniej 4,5 pkt proc. W niniejszej pracy za kryterium oceny skuteczności konsolidacji przyjęto wielkość redukcji długu publicznego i (lub) deficytu fiskalnego odnotowywanej najwcześniej od drugiego roku trwania konsolidacji, przy czym redukcja ta powinna następować przynajmniej przez dwa kolejne lata. Przyjęcie takiego kryterium pozwala, z jednej strony, na wyeksponowanie trwałości efektów konsolidacji, a z drugiej strony – na wyeliminowanie z pomiaru przypadkowych zmian w deficycie budżetowym lub w poziomie długu publicznego, niezwiązanych z konsolidacją. Na podstawie danych z wszystkich lat, w których odnotowano redukcję długu (deficytu fiskalnego) w danym kraju, obliczono średnioroczną wartość redukcji długu (deficytu),

którą przyjęto za miarę skuteczności działań konsolidacyjnych w tym kraju w latach 2001–2015.

3. Wyniki badań

Aby opisać zależności zachodzące we współwystępowaniu krajów UE i kierunków polityki naprawy finansów publicznych, zastosowano analizę korespondencji. Podstawą do jej przeprowadzenia była tabela liczebności procesów konsolidacji odpowiadających poszczególnym państwom UE i typom zabiegów konsolidacyjnych. Obiektami w analizie korespondencji były więc kraje UE i charakteryzujące je kierunki działań konsolidacyjnych (obszary redukcji wydatków w poszczególnych sektorach gospodarki oraz wzrost różnych typów podatków), które oznaczono opisanymi wcześniej skrótami. Nazwy krajów UE oznaczono zgodnie z ISO 3166 (<https://www.iso.org/iso-3166-country-codes.html>, data dostępu: 10.04.2017): AT – Austria, BE – Belgia, BG – Bułgaria, HR – Chorwacja, CY – Cypr, CZ – Czechy, DK – Dania, EE – Estonia, FI – Finlandia, FR – Francja, GR – Grecja, ES – Hiszpania, NL – Holandia, IE – Irlandia, LT – Litwa, LU – Luksemburg, LV – Łotwa, MT – Malta, DE – Niemcy, PL – Polska, PT – Portugalia, RO – Rumunia, SK – Słowacja, SI – Słowenia, SE – Szwecja, HU – Węgry, GB – Wielka Brytania, IT – Włochy. W celu określenia wystarczającego wymiaru przestrzeni rzutowania obiektów i cech skorzystano z wykresu osypiska (rys. 1). Wynika z niego, że pierwsze wyraźne wyhamowanie zmniejszania się wartości własnych następuje przy liczbie wymiarów równej 2 i taką liczbę wymiarów wybrano do prezentacji wyników analizy korespondencji. W tej przestrzeni zostało wyjaśnionych ponad 53% zmienności danych wejściowych. Wartość statystyki chi-kwadrat wynosi 9583,3 (wartość $p = 0,000$) – wynik ten wskazuje na istotny związek pomiędzy krajami UE i kierunkami prowadzonej w nich polityki konsolidacji finansów publicznych. Wyniki analizy korespondencji w dwuwymiarowej przestrzeni przedstawiono na rys. 2.

Jakość odwzorowania rzeczywistych wystąpień poszczególnych kategorii cech wybranej przestrzeni oceniono za pomocą miernika jakości odwzorowania (*quality of display of a point*) [Stanimir 2005]. Dla blisko połowy krajów UE wartość tego miernika była wyższa od 0,5, a w wypadku 20% z nich miernik ten przekraczał wartość 0,8. Inercje natomiast w wypadku ok. 40% punktów reprezentujących kierunki polityki konsolidacji finansów publicznych miały ponad 70-proc. udział w przestrzeni rzutowania, a dla 33% z nich udział ten przekraczał 80%. Przedstawione wyniki wskazują na przeciętną jakość odwzorowania współwystępowania kategorii.



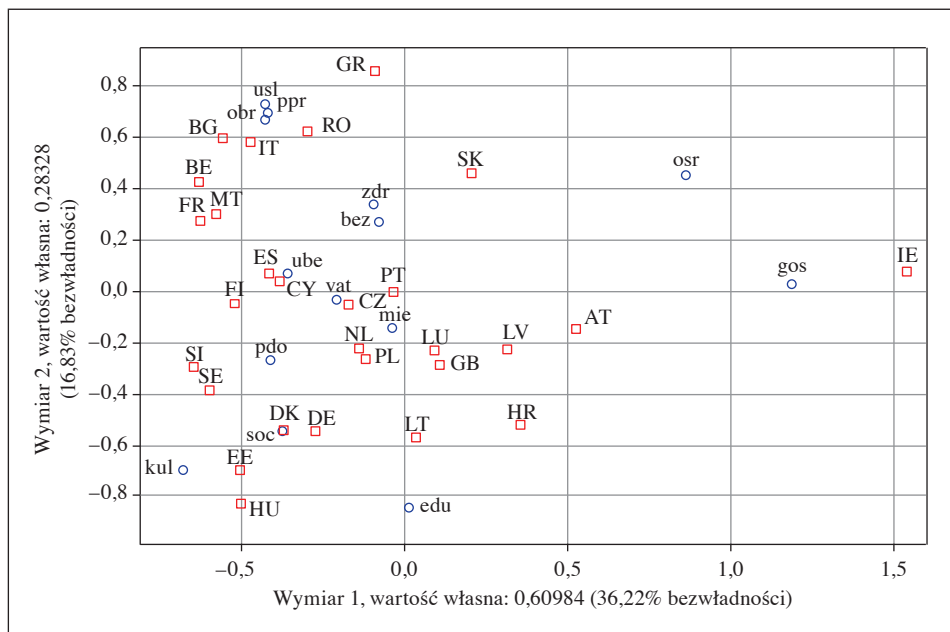
Rys. 1. Wartości własne w zależności od wymiaru przestrzeni (kryterium ospypiska) w badaniu relacji pomiędzy krajami UE i prowadzonymi w nich działaniami konsolidacyjnymi

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu, <http://ec.europa.eu/eurostat/data/database> (data dostępu: 10.04.2017).

Analizując położenie punktów reprezentujących kraje UE i prowadzone w nich działania związane z naprawą finansów publicznych, sformułowano następujące wnioski:

- w wypadku Węgier i Estonii najbardziej charakterystyczną cechą polityki konsolidacji finansów publicznych było zmniejszanie wydatków na kulturę,
- Niemcy, Dania i Litwa wyróżniały się pod względem redukcji wydatków na zabezpieczenia społeczne i edukację,
- dla Szwecji, Słowenii i Finlandii najbardziej typowy był wzrost podatków dochodowych,
- w działaniach w zakresie konsolidacji finansów publicznych w Polsce, Holandii, Czechach i Portugalii najbardziej charakterystyczny był wzrost wpływów z podatków od towarów i usług, a także ograniczanie wydatków na mieszkalnictwo,
- Słowacja i Portugalia wyróżniały się pod względem zmniejszania wydatków na ochronę zdrowia, zamówienia publiczne i bezpieczeństwo,
- dla Rumunii, Grecji, Bułgarii i Włoch typowe było zmniejszanie wydatków na usługi publiczne i obronność, a także wzrost wpływów z podatków od produkcji i importu,
- Hiszpania i Cypr wyróżniały się pod względem wzrostu składki na ubezpieczenia społeczne,

- dla Chorwacji, Danii, Niemiec i Litwy typowa była redukcja wydatków na edukację,
- dla Irlandii charakterystyczne było zmniejszanie wydatków na gospodarkę.



Rys. 2. Wykres konfiguracji punktów reprezentujących kraje UE i kierunki konsolidacji fiskalnej (wzrost podatków, redukcję wydatków budżetowych)

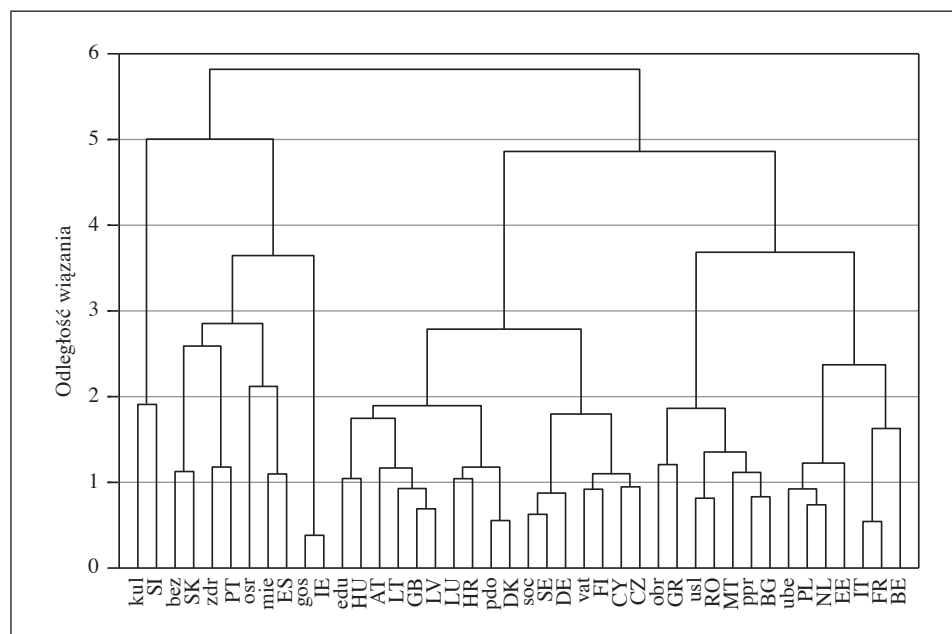
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu, <http://ec.europa.eu/eurostat/data/database> (data dostępu: 10.04.2017).

Stożek wyjaśnienia danych w powyższej analizie jest umiarkowany, więc dla porównania powtórnie przeprowadzono analizę korespondencji w przestrzeni o maksymalnej liczbie wymiarów, równej 13, w której została wyjaśniona całkowita zmienność danych. Ponieważ graficzna prezentacja wyników analizy korespondencji w takiej przestrzeni jest problematyczna, zdecydowano się na pośredni sposób przedstawienia rezultatów, stosując analizę skupień. Grupowanie krajów UE i narzędzi polityki konsolidacji finansów publicznych przeprowadzono, posługując się zmiennymi, których wartościami były współrzędne odpowiednich kategorii cech w przestrzeni 13-wymiarowej. W grupowaniu zastosowano metodę Warda z odległością euklidesową (rys. 3).

Optymalną liczbę skupień określono, opierając się na pierwszym wyraźnym przyroście odległości aglomeracyjnej dla kolejnych etapów wiązania. Stosując to kryterium, przycięto dendrogram z rys. 3 na wysokości wiązania 3 i otrzymano

6 jednorodnych skupień. Analizując ich skład, można sformułować następujące wnioski dotyczące kierunków polityki konsolidacji finansów publicznych:

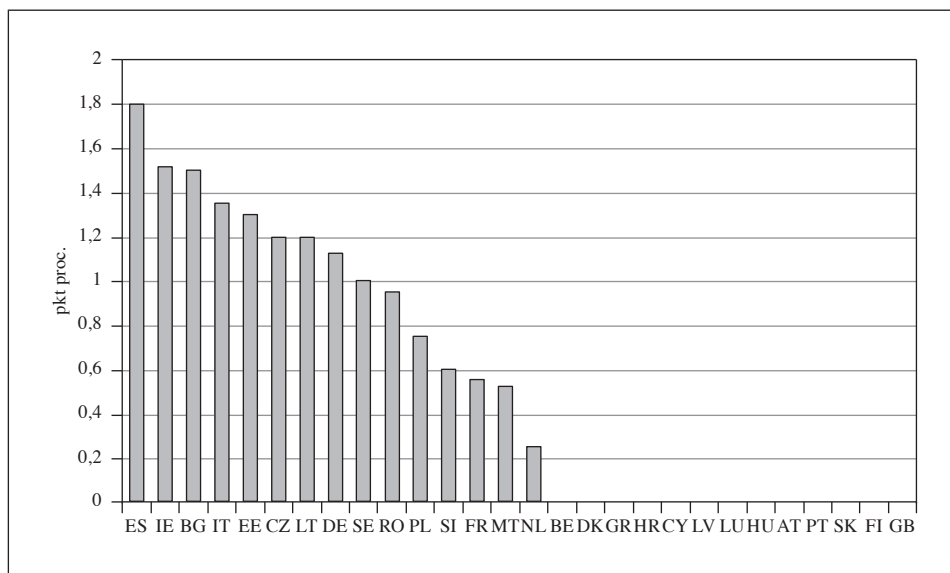
- w Słowenii charakterystyczne było obniżanie wydatków na kulturę,
- Słowację, Portugalię i Hiszpanię wyróżniało obniżenie wydatków na bezpieczeństwo, opiekę zdrowotną, mieszkalnictwo i ochronę środowiska,
- dla irlandzkiej polityki konsolidacji fiskalnej charakterystyczna była redukcja wydatków na gospodarkę,
- dla Grecji, Rumunii, Malty i Bułgarii charakterystyczne było obniżenie wydatków na obronność i usługi publiczne oraz wzrost wysokości podatków od produkcji i importu,
- w zakresie działań konsolidacyjnych prowadzonych w Polsce, Holandii, Estonii, we Włoszech, Francji i Belgii typowe było podnoszenie składek na ubezpieczenia społeczne,
- dla pozostałych krajów UE charakterystyczne było obniżenie wydatków na edukację i zabezpieczenia społeczne, a także wzrost stawek podatku dochodowego i podatku od towarów i usług.



Rys. 3. Wyniki grupowania krajów UE i narzędzi polityki konsolidacji finansów publicznych

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu, <http://ec.europa.eu/eurostat/data/database> (data dostępu: 10.04.2017).

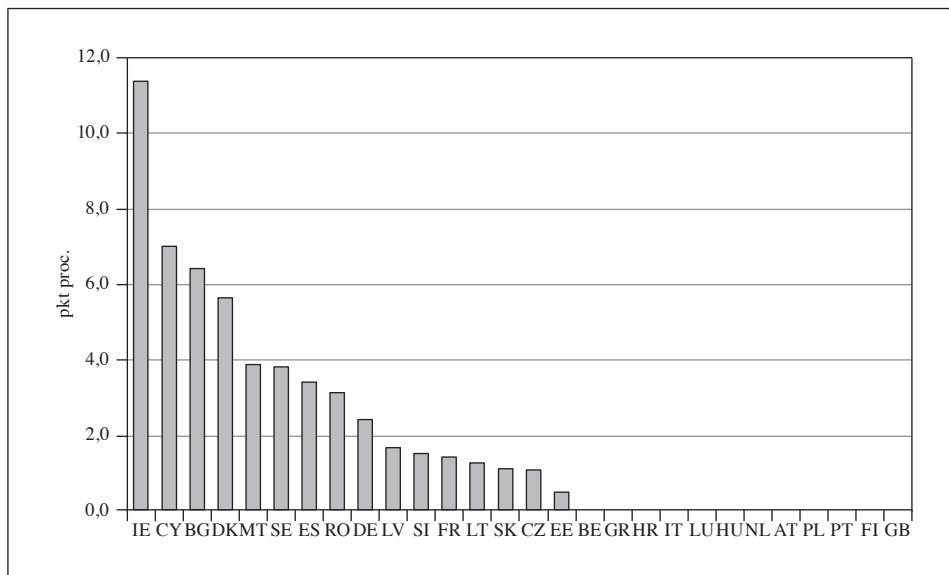
Aby zbadać skuteczność stosowanych narzędzi konsolidacji finansów publicznych, obliczono średnioroczny poziom redukcji długu publicznego oraz deficytu budżetowego. W obliczeniach brano pod uwagę tylko sekwencje przynajmniej dwóch następujących po sobie lat obejmujących okres konsolidacji (począwszy od drugiego roku trwania tego procesu) oraz dotyczące okresu następującego bezpośrednio po jej zakończeniu. Wymóg uwzględniania sekwencji przynajmniej dwóch kolejnych lat pozwala określić skuteczność polityki konsolidacyjnej i wyeliminować z obliczeń krótkotrwałe (jednoroczne) zmiany w poziomie długu lub deficytu. Na rys. 4 i 5 przedstawiono wartości średniorocznej redukcji deficytu fiskalnego i długu publicznego w krajach UE.



Rys. 4. Wartości średniorocznej redukcji deficytu publicznego w relacji do PKB w krajach UE w latach 2001–2015

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu, <http://ec.europa.eu/eurostat/data/database> (data dostępu: 10.04.2017).

Z przedstawionych danych wynika, że w blisko połowie krajów UE nie zredukowano deficytu fiskalnego ani długu publicznego. Największą redukcję deficytu publicznego odnotowano w Hiszpanii (1,8 pkt proc.), Irlandii (1,52 pkt proc.) oraz Bułgarii (1,5 pkt proc.). Z kolei do największej redukcji długu publicznego w badanym okresie doszło w Irlandii (11,38 pkt proc.), na Cyprze (7 pkt proc.) oraz w Bułgarii (6,4 pkt proc.).



Rys. 5. Wartości średniorocznej redukcji długu publicznego w relacji do PKB w krajach UE w latach 2001–2015

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu, <http://ec.europa.eu/eurostat/data/database> (data dostępu: 10.04.2017).

Porównując profile działań konsolidacyjnych w krajach UE i wyniki pomiarów skuteczności konsolidacji fiskalnej, można wskazać narzędzia dyskrecjonalnej polityki fiskalnej, których zastosowanie może przyczynić się do efektywnego ograniczenia deficytu fiskalnego i długu publicznego. Na podstawie przedstawionych rezultatów można stwierdzić, że najbardziej skuteczną konsolidację fiskalną przeprowadzono w tych krajach, w których jednocześnie ograniczono wydatki na obronę i na zamówienia publiczne oraz podniesiono podatki od produkcji i importu (w 75% krajów o takim profilu działań konsolidacyjnych skutecznie zmniejszono deficyt i dług publiczny). Konsolidacja fiskalna była natomiast mało skuteczna, jeśli dochodziło do równoczesnego obniżenia wydatków na bezpieczeństwo publiczne, ochronę zdrowia, ochronę środowiska i mieszkalnictwo (w 67% krajów o takim profilu polityki dyskrecjonalnej nie uzyskano żadnych pozytywnych efektów konsolidacji fiskalnej). Dla największej liczby krajów UE charakterystyczne było jednocześnie ograniczenie wydatków na edukację i zabezpieczenia społeczne oraz podniesienie podatków dochodowych oraz podatków od towarów i usług. Taki profil działań konsolidacyjnych tylko w wypadku 25% krajów przyczynił się do zredukowania deficytu budżetowego i długu publicznego, a w prawie 70% krajów

o takim profilu nie zmniejszono trwale deficytu budżetowego. Należy podkreślić, że zaobserwowane prawidłowości nie dotyczą wszystkich krajów UE. Narzędzia dyskrecjonalnej polityki konsolidacji finansów publicznych, które okazały się skuteczne w wypadku pewnej grupy krajów, nie muszą być skuteczne w innym państwie. Faktyczna skuteczność konsolidacji zależy od kondycji gospodarki danego państwa oraz stanu jego finansów publicznych.

4. Podsumowanie

Z przedstawionej analizy wynika, że poszczególne ścieżki konsolidacji finansów publicznych różnią się pod względem skuteczności prowadzonych działań. Dzięki temu możliwe jest wyodrębnienie określonych profili konsolidacji finansów publicznych w krajach UE. Pozwala to rekomendować zastosowanie pewnych zestawów narzędzi dyskrecjonalnej polityki fiskalnej, których użycie wpływa na poprawę stanu finansów publicznych. Różny stopień skuteczności zastosowania narzędzi fiskalnych do poprawienia salda budżetowego i zmniejszenia długu publicznego wynika m.in. z tego, że dotyczą one różnych obszarów gospodarki, sektorów o różnym mechanizmie redystrybucji środków publicznych. Wydatki publiczne kierowane do określonych sektorów są w różnym stopniu odzyskiwane w wyniku wpływania do budżetu podatków płaconych np. z tytułu rosnącego popytu. Jest to tzw. mechanizm mnożnika wydatków publicznych, polegający na tym, że wzrost wydatków publicznych skutkuje wzrostem dochodu narodowego, co właśnie prowadzi do „zwrotu” poniesionych wydatków w formie podatków oraz do wzrostu masy dochodów publicznych [Owsiak 2002]. W zależności od tego, jakiego obszaru gospodarki dotyczą wydatki budżetowe, efekt redystrybucji dochodów ma inną skalę. Zwiększanie obciążeń podatkowych także w mniejszym lub większym stopniu hamuje rozwój gospodarki w zależności od tego, którego sektora gospodarki dotyczy, co może się przekładać na poziom deficytu budżetowego i długu publicznego (np. zmniejszenie opodatkowania podmiotów gospodarczych może być zachętą do zakładania nowych firm, które będą odprowadzać podatki, co zrekompensuje niższe wpływy do budżetu uzyskiwane w wyniku obniżenia podatków). Niezależnie od tego skuteczność polityki konsolidacyjnej zależy również od cech gospodarki danego kraju, m.in. od jej struktury i efektywności ściągania podatków, do wniosków sformułowanych na podstawie zaprezentowanej analizy należy więc odnosić się z pewną ostrożnością, mając również na uwadze to, że przyjęto określoną definicję konsolidacji finansów publicznych oraz określone metody pomiaru skuteczności procesu konsolidacji. Można przypuszczać, że przyjęcie innej definicji konsolidacji i zastosowanie innej metody pomiaru efektywności działań konsolidacyjnych skutkowałoby uzyska-

niem nieco innych wyników, potwierdzenie tego przypuszczenia wymagałoby jednak podjęcia dalszych badań.

Literatura

- Alesina A.F., Ardagna S. [2009], *Large Changes in Fiscal Policy: Taxes versus Spending*, NBER Working Paper Series No 15438, Cambridge, MA, <https://doi.org/10.3386/w15438>.
- Almeida V., Castro G., Félix R.M., Maria I.R. [2013], *Fiscal Consolidation in Small Euro-area Economy*, „International Journal of Central Banking”, vol. 9, nr 4.
- Beetsma R., Cimadomo J., Furtuna O., Giuliadori M. [2015], *The Confidence Effects of Fiscal Consolidations*, Working Paper Series No 1770, European Central Bank, Frankfurt am Main.
- Blasius J. [2001], *Korrespondenzanalyse*, Oldenbourg Verlag, München.
- Ciak J. [2002], *Deficyt budżetowy – zagrożenie dla finansów publicznych*, „Bank i Kredyt”, nr 5.
- Clausen S.E. [1998], *Applied Correspondence Analysis: An Introduction*, Sage University Paper. Series: Quantitative Applications in the Social Sciences 121, Sage Publications, Thousand Oaks–London–New Delhi.
- Devries P., Guajardo J., Leigh D., Pescatori A. [2011], *A New Action-based Dataset of Fiscal Consolidation*, IMF Working Paper No 11/128, Washington, <http://dx.doi.org/10.5089/9781455264407.001>.
- Estevão M., Samake I. [2013], *The Economic Effects of Fiscal Consolidation with Debt Feedback*, IMF Working Paper No 13/136, Washington, DC, <https://doi.org/10.5089/9781484304488.001>.
- Giavazzi F., Jappelli T., Pagano M. [2000], *Searching for Non-linear Effects of Fiscal Policy: Evidence from Industrial and Developing Countries*, „European Economic Review”, vol. 44, nr 7, [https://doi.org/10.1016/s0014-2921\(00\)00038-6](https://doi.org/10.1016/s0014-2921(00)00038-6).
- Greenacre M. [1993], *Correspondence Analysis in Practice*, Academic Press, London.
- Kaplanoglou G., Rapanos V.T., Bardakas I.C. [2013], *Does Fairness Matter for the Success of Fiscal Consolidation?*, Economics Discussion Reports No 6, University of Athens, Department of Economics, <https://doi.org/10.2139/ssrn.2267831>.
- Michalczyk W. [2013], *Kryteria konwergencji polskiej gospodarki jako wyznacznik tempa integracji walutowej*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego. Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia”, nr 57.
- Miształ P. [2011], *Dług publiczny i wzrost gospodarczy w krajach członkowskich Unii Europejskiej*, „Zeszyty Naukowe SGGW w Warszawie. Polityki Europejskie, Finanse i Marketing”, nr 5 (54).
- Molnár M. [2012], *Fiscal Consolidation: What Factors Determine the Success of Consolidation Efforts?*, „OECD Journal: Economic Studies”, nr 1, <http://dx.doi.org/10.1787/19952856>.
- Moździerz A. [2016], *Spór o koncepcję konsolidacji fiskalnej*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, nr 273.
- Owsiak S. [2002], *Podstawy nauki finansów*, PWE, Warszawa.
- Public Finances in EMU – 2007* [2007], European Economy No 3, European Commission, Brussels.

Report on Public Finances in EMU [2014], European Economy No 9, European Commission, Brussels.

Stanimir A. [2005], *Analiza korespondencji jako narzędzie do badania zjawisk ekonomicznych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław.

Ziółkowska W. [2016], *Wybrane aspekty konsolidacji fiskalnej w sektorze general government*, „Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia”, nr 6 (84), cz. 2, <https://doi.org/10.18276/frfu.2016.6.84/2-01>.

Identifying Patterns of Fiscal Consolidation – the Example of EU Countries

(Abstract)

Fiscal consolidation is based on efforts to balance revenues and expenditures on the public budget. This can be achieved by reducing public spending or increasing taxes. Fiscal consolidation has very important macroeconomic consequences in both the long and short term. The aim of this article is to find patterns of fiscal consolidation in EU countries. To detect patterns of the fiscal consolidation, multivariate statistical analysis methods were applied: correspondence and cluster analysis. The macroeconomic effects of fiscal consolidation were also analysed. The study used data from Eurostat.

Keywords: fiscal consolidation, public finance, correspondence analysis, cluster analysis.

| *Sergiusz Herman*

Specyfika branżowa spółek akcyjnych w Polsce a prognozowanie ich upadłości

Streszczenie

Do upadłości przedsiębiorstw dochodzi w każdej rozwiniętej gospodarce rynkowej. Ze względu na negatywne konsekwencje tego zjawiska zaczęto podejmować próby przewidywania (prognozowania) jego wystąpienia. Jednym z kierunków badań poświęconych temu zagadnieniu jest konstruowanie modeli prognostycznych, w których zostaje uwzględniona specyfika branżowa badanych przedsiębiorstw. W polskiej literaturze przedmiotu rzadko opisuje się konstruowanie modeli dotyczących poszczególnych branż. W artykule dokonano przeglądu badań związanych z tą problematyką. Głównym celem przeprowadzenia opisanego w pracy badania empirycznego było porównanie wartości błędu predykcji modeli odnoszących się do poszczególnych branż oraz modeli ogólnych (nieuwzględniających specyfiki branżowej badanych spółek). Dodatkowym celem było ustalenie determinant upadłości spółek akcyjnych w analizowanych branżach gospodarki. W przeprowadzonej analizie wykorzystano dane finansowe 180 spółek akcyjnych, zastosowano metodę wielokrotnego repróbkiowania (*bootstrapping*) oraz wielowymiarową analizę dyskryminacyjną.

Słowa kluczowe: upadłość, prognozowanie, analiza dyskryminacyjna, specyfika branżowa.
Klasyfikacja JEL: C53, G33.

1. Wprowadzenie

W prognozowaniu upadłości przedsiębiorstw oprócz stosowania coraz bardziej zaawansowanych narzędzi statystycznych i poszukiwania nowych zmiennych prognostycznych wykorzystuje się także modele, w konstruowaniu których uwzględnia się specyfikę branżową badanych przedsiębiorstw. Słuszność takiego podejścia potwierdza E.I. Altman, światowy autorytet w dziedzinie prognozowania upadłości przedsiębiorstw. Podkreśla on, że należy dążyć do szacowania modeli prognozowania upadłości na podstawie danych finansowych przedsiębiorstw prowadzących możliwie jak najbardziej jednorodną działalność gospodarczą [Altman 1983, s. 125]. W polskiej literaturze przedmiotu rzadko opisywane są modele dotyczące poszczególnych branż, co wynika z trudności z uzyskaniem odpowiednio licznej próby badawczej. Dotychczas jedynie w dwóch przypadkach autorzy badań dokonali porównania trafności klasyfikacji otrzymanych za pomocą modeli skonstruowanych dla konkretnych branż oraz modelu, w którym specyfika branżowa przedsiębiorstw nie została uwzględniona (w dalszej części opracowania nazywanego ogólnym) [Hołda 2006, Juszczak i Balina 2014]. Ze względu na wykorzystaną metodę szacowania błędu predykcji skonstruowanych modeli – prostą metodę podziału (*split sample method*, *holdout method*) – na podstawie wyników zaprezentowanych w tych opracowaniach nie da się jednoznacznie stwierdzić, czy dzięki zastosowaniu modeli branżowych można uzyskać większą zdolność predykcyjną niż w wypadku modeli ogólnych.

W artykule dokonano przeglądu badań empirycznych związanych z konstruowaniem modeli (klasyfikatorów), w których uwzględniono specyfikę branż, służących do prognozowania upadłości przedsiębiorstw w Polsce. Oszacowano oraz porównano zdolności predykcyjne modeli dotyczących poszczególnych branż oraz modeli ogólnych opracowanych dla spółek akcyjnych. W tym celu wykorzystano metodę wielokrotnego repróbkiowania (*bootstrapping*). Wyodrębniono także te spośród analizowanych wskaźników finansowych, które w wypadku modeli skonstruowanych dla poszczególnych branż mogą zostać uznane za determinanty upadłości spółek akcyjnych. Sprawdzone, czy determinanty te są różne w poszczególnych branżach gospodarki.

2. Przegląd literatury przedmiotu

W polskiej literaturze przedmiotu opracowywanie oddzielnych modeli predykcyjnych dla poszczególnych sektorów gospodarki zostało uznane za zasadne m.in. przez P. Rybickiego [2002, s. 53] z uwagi na różne wymagania dotyczące struktury aktywów i pasywów w firmach z różnych branż, np. handlowej oraz

produkcyjnej. B. Prusak [2011, s. 52] podkreślił z kolei, że poszczególne branże gospodarki charakteryzuje odmienny poziom rozwoju oraz konkurencji, znajdują się one na innych etapach cyklu życia sektorów. Przedsiębiorstwa powinny być zatem oceniane za pomocą odmiennych wskaźników finansowych, których wartości średnie oraz optymalne mogą być inne w wypadku różnych obszarów gospodarki. Zwrócił na to uwagę również J. Kitowski [2012, s. 267], który zauważył, że częstym błędem jest przypisywanie istniejącym już modelom uniwersalności sektorowej.

W ostatnich latach w polskiej literaturze przedmiotu opisywano pewne próby skonstruowania modeli uwzględniających specyfikę branżową badanych przedsiębiorstw, podejmowane z uwagi na zwiększenie się dostępu do danych finansowych. T. Korol [2005] wykorzystał w tym celu dwa rodzaje sieci neuronowych: jednokierunkowe wielowarstwowe oraz rekurencyjne. Próbę uczącą stanowiło 78 przedsiębiorstw produkcyjnych, spośród których połowa była zagrożona upadłością. Dane finansowe pochodziły ze sprawozdań finansowych dotyczących tych firm z lat 1998–2001. Sieci skonstruowano na dwa sposoby: uwzględniając w budowie wszystkie 28 zmiennych oraz biorąc pod uwagę tylko wybrane zmienne, wyselekcjonowane na podstawie analizy macierzy korelacji. Zbudowane modele charakteryzowały się wysokimi globalnymi współczynnikami trafnych klasyfikacji w próbie testowej (składającej się z 78 przedsiębiorstw): od 85,9% (na dwa lata przed upadłością) do 98,72% (rok przed upadłością).

Drugim opracowaniem, o którym należy wspomnieć, jest monografia A. Hołdy [2006]. W opisanym w niej kompleksowym badaniu analizą objęto 374 przedsiębiorstwa o różnej formie prawnej. Zbiór uczący próby liczył 262 podmioty, a grupę testową stanowiło 112 firm. Reprezentowały one trzy branże gospodarki: produkcyjną (EKD 10–36), budowlaną (EKD 45) oraz handlowo-usługową (EKD 50–74). W badaniu zastosowano trzy metody doboru zmiennych do modelu: regresję krokową, metodę głównych składowych i analizę kroczącą, oraz cztery metody prognozowania upadłości: liniową analizę dyskryminacyjną, regresję logistyczną, sztuczne sieci neuronowe i drzewa decyzyjne. Korzystając z trzech pierwszych metod prognozowania, skonstruowano aż 32 modele dla poszczególnych branż gospodarki. Trafność klasyfikacji uzyskana w wypadku tych modeli wynosiła 60–90%. Żadna z zastosowanych metod nie okazała się pod tym względem wyraźnie skuteczniejsza od pozostałych. Skonstruowano także jeden model z wykorzystaniem drzew decyzyjnych. Zbudowano go, opierając się na danych finansowych firm branży produkcyjnej. A. Hołda w swojej pracy zweryfikował także zasadność konstruowania modeli dotyczących poszczególnych branż. W tym celu oszacował dodatkowo modele ogólne (skonstruowane na podstawie danych dotyczących wszystkich przedsiębiorstw łącznie). Ich zdolność prognostyczna

okazała się mniejsza od tej charakteryzującej modele, w których specyfika branżowa została uwzględniona.

Drzewa decyzyjne zostały zastosowane przez A. Hołdę [2009] także w celu skonstruowania modelu dla branży budowlanej. Sprawozdania finansowe wykorzystane w badaniu pochodziły z lat 1999–2001 i dotyczyły 68 podmiotów gospodarczych. Spośród tych przedsiębiorstw wyodrębniono próbę uczącą, liczącą 48 obiektów, oraz testową – 20 pozostałych firm. Do budowy drzewa wykorzystano 12 wskaźników finansowych, z których ostatecznie uwzględniono tylko dwa: charakteryzujące rentowność oraz przepływy pieniężne w działalności inwestycyjnej. Globalny współczynnik trafnych klasyfikacji uzyskanych z zastosowaniem modelu na próbie testowej wyniósł zaledwie 65%.

O potrzebie konstruowania modeli do prognozowania upadłości z uwzględnieniem poszczególnych branż pisał także S. Juszczyk [2010]. Efektem jego pracy był model zbudowany w odniesieniu do branży usług spedycyjnych. Do skonstruowania go wykorzystano liniową analizę dyskryminacyjną, sekwencyjny dobór zmiennych objaśniających metodą regresji krokowej wstecz oraz dane finansowe 16 przedsiębiorstw (ośmiu sprawnie funkcjonujących oraz ośmiu, które ogłosiły upadłość) z lat 2003–2007. Globalny współczynnik trafnych klasyfikacji w wypadku tego modelu wyniósł aż 100%, należy jednak podkreślić, że został on wyznaczony wyłącznie na podstawie bardzo małej próby uczącej.

Kolejnym opracowaniem, w którym opisano konstruowanie modelu do prognozowania upadłości przedsiębiorstw z uwzględnieniem specyfiki branż, jest publikacja E. Grzegorzewskiej [2011]. Zbudowała ona model logitowy na podstawie informacji z lat 1996–2009 o 11 parach przedsiębiorstw rolniczych. Weryfikację trafności klasyfikacji uzyskanych za pomocą modelu przeprowadzono na próbie uczącej. Globalny współczynnik trafnych klasyfikacji wyniósł 93,8%.

Skonstruowania modeli do prognozowania upadłości przedsiębiorstw różnych branż gospodarki podjęły się w ostatnich latach także M. Potoczna oraz O. Wiśniewska [2013]. Przedmiotem ich zainteresowania były sektory handlu, przemysłu oraz usług. Próbę badawczą stanowiły 352 średnie i duże firmy, spośród których 102 znalazły się w stanie upadłości. Autorki wykorzystały w badaniu liniową analizę dyskryminacyjną oraz regresję logistyczną. Warto zaznaczyć, że zastosowano metodę walidacji krzyżowej typu „pozostaw jedną poza” (*leave-one-out*). Globalny współczynnik trafnych klasyfikacji w wypadku tych modeli wynosił 67–87%. Autorki odrzuciły postawioną hipotezę badawczą o tym, że w poszczególnych sektorach gospodarki odmienne czynniki wpływają na prawdopodobieństwo upadłości przedsiębiorstw.

Badanie dotyczące prognozowania upadłości przedsiębiorstw w poszczególnych branżach gospodarki przeprowadzili również S. Juszczyk oraz R. Balina [2014]. Próbę badawczą stanowiło 180 spółek z ograniczoną odpowiedzialnością,

reprezentujących trzy branże gospodarki: handel hurtowy żywnością, napojami i wyrobami tytoniowymi (PKD 46.31.Z–46.39.Z), roboty budowlane związane ze wznoszeniem budynków (PKD 41.10.Z–41.20.Z) oraz transport drogowy towarów (PKD 49.41.Z). Badanie dotyczyło okresu 2007–2010 r. Autorzy skonstruowali trzy modele dyskryminacyjne odnoszące się do poszczególnych branż oraz jeden model ogólny na podstawie danych dotyczących 120 przedsiębiorstw. Trafność klasyfikacji ocenili na podstawie informacji o pozostałych 60 spółkach. Globalne współczynniki trafnych klasyfikacji w próbie testowej w wypadku modeli opracowanych z uwzględnieniem specyfiki branż okazały się wysokie: wynosiły 85% w odniesieniu do przedsiębiorstw z branży budowlanej, 87,5% w odniesieniu do spółek handlowych oraz 92,5% dla przedsiębiorstw transportowych. W wypadku modelu ogólnego trafność klasyfikacji wyniosła 77,5%. Zdaniem autorów świadczy to o zasadności konstruowania dla polskich przedsiębiorstw modeli odnoszących się do poszczególnych branż.

Kolejne badanie przeprowadzone na podstawie danych dotyczących jednorodnej grupy przedsiębiorstw zostało opisane w opracowaniu J. Pocięchy, M. Baryły oraz B. Pawełek [2015]. Próbę badawczą stanowiło 7329 przedsiębiorstw (w tym 182 firmy, w wypadku których ogłoszono upadłość) z branży przetwórstwa przemysłowego. Zasadniczym celem autorów artykułu było sprawdzenie, jaki wpływ na rezultaty badania ma zastosowanie losowej i nielosowej metody doboru próby. W analizie wykorzystano cztery metody klasyfikacyjne: liniową funkcję dyskryminacyjną, model logitowy, sieć neuronową oraz drzewo klasyfikacyjne. Globalne współczynniki trafnych klasyfikacji uzyskanych w wyniku zastosowania oszacowanych modeli i nielosowej techniki doboru przedsiębiorstw do próby wynosiły 62,16–89,58%. W wypadku losowego doboru firm współczynniki te przyjmowały wartości 71,43–95,83%. Na podstawie rezultatów badania stwierdzono, że w większości wypadków modele statystyczne charakteryzowały się lepszymi zdolnościami prognostycznymi, gdy jako metodę dobierania próby stosowano losowanie niezależne.

Specyfikę branżową przedsiębiorstw uwzględniono także w badaniu opisanym w pracy B. Pawełek oraz D. Grochowiny [2017]. Dotyczyło ono zbilansowanego (84 firmy) oraz niezbilansowanego (168 firm) zbioru przedsiębiorstw z sektora przetwórstwa przemysłowego. Celem badania było zweryfikowanie przydatności stosowania podejścia wielomodelowego w prognozowaniu upadłości przedsiębiorstw w Polsce. Wykorzystano metody *bagging*, *boosting*, *random subspaces* oraz *random forests*. Uśrednione globalne współczynniki błędnych klasyfikacji uzyskanych w wyniku zastosowania oszacowanych w badaniu modeli wynosiły 21,1–35,5%. Rezultaty badania pozwoliły wyciągnąć wniosek, że zastosowanie podejścia wielomodelowego może przyczynić się do poprawy zdolności predykcyjnej drzew klasyfikacyjnych.

Jedynie w dwóch z przedstawionych publikacji podjęto próbę porównania trafności klasyfikacji uzyskanych w wyniku zastosowania modeli ogólnych oraz modeli odnoszących się do poszczególnych branż [Hołda 2006, Juszczak i Balina 2014]. W obu wypadkach wykorzystano w tym celu wyłącznie prostą metodę podziału i uwzględniono mało liczne próby testowe. A. Hołda skonstruował modele, korzystając z danych finansowych przedsiębiorstw o różnej formie prawnej, a S. Juszczak oraz R. Balina wykorzystali wyłącznie sprawozdania finansowe spółek z ograniczoną odpowiedzialnością. W badaniach tych modele opracowane dla poszczególnych branż charakteryzowały się wyższą trafnością klasyfikacji niż modele ogólne.

3. Metodyka badania*

W celu przeprowadzenia prezentowanego w artykule badania empirycznego należało przygotować odpowiednią próbę badawczą, w której byłyby reprezentowane dwie rozłączne populacje: przedsiębiorstw w złej oraz dobrej kondycji finansowej. Kryterium decydującym o zaklasyfikowaniu przedsiębiorstw do pierwszej grupy było ogłoszenie przez odpowiedni sąd ich upadłości. Do wyselekcjonowania próby wykorzystano informacje zawarte w Internetowym Monitorze Sądowym i Gospodarczym. W ten sposób zgromadzono dane finansowe dotyczące:

- 30 spółek akcyjnych prowadzących działalność z zakresu budownictwa (PKD 41.10–43.99.Z),
- 30 spółek akcyjnych z branży przetwórstwa przemysłowego (PKD 10.11–33.20.Z),
- 30 spółek akcyjnych, których działalność została zaklasyfikowana jako handel hurtowy i detaliczny (PKD 46.11–47.99.Z).

Do każdego z tych przedsiębiorstw została dobrana spółka akcyjna będąca w dobrej kondycji finansowej. Jako kryteria dopasowania poszczególnych par przyjęto: sektor, działalność główną oraz wielkość aktywów. Dane finansowe spółek, w wypadku których ogłoszono upadłość, pochodziły ze sprawozdań finansowych dotyczących roku poprzedzającego ten, w którym złożono pierwszy wniosek o ogłoszenie upadłości. Pochodziły one z lat 2000–2013. Sprawozdania finansowe dobrze prosperujących spółek dotyczyły tego samego okresu. Źródłem danych były bazy firm Notoria Serwis i Bisnode Dun & Bradstreet oraz Monitor Polski B.

W badaniach empirycznych obliczono i zastosowano 19 wskaźników finansowych, charakteryzujących rentowność, płynność finansową, strukturę kapita-

* Wybrane wyniki badania zostały przedstawione w pracy [Herman 2017].

łowo-majątkową oraz sprawność działania przedsiębiorstw (tabela 1). Ich wyboru dokonano na podstawie studiów literatury przedmiotu – są to wskaźniki najczęściej uwzględniane w modelach do prognozowania upadłości. Kierowano się także dostępnością danych w sprawozdaniach finansowych spółek.

Do skonstruowania modeli do prognozowania upadłości przedsiębiorstw wykorzystano liniową analizę dyskryminacyjną. Pomimo dynamicznego rozwoju metod statystycznych jest ona wciąż bardzo popularna wśród praktyków biznesu.

Tabela 1. Wskaźniki finansowe wykorzystane w badaniach

Wskaźnik	Formuła
<i>ROA</i>	zysk netto / aktywa
<i>ROE</i>	zysk netto / kapitały własne
<i>ZB</i>	zysk brutto / aktywa
<i>ZS</i>	zysk ze sprzedaży / przychody ze sprzedaży
<i>MZ</i>	zysk brutto / przychody ze sprzedaży
<i>MZ2</i>	zysk netto / przychody ze sprzedaży
<i>MZO</i>	zysk operacyjny / przychody ze sprzedaży
<i>KP</i>	kapitał pracujący / suma bilansowa
<i>WBP</i>	majątek krótkoterminowy / zobowiązania krótkoterminowe
<i>WSP</i>	(majątek obrotowy – zapasy) / zobowiązania krótkoterminowe
<i>WPP</i>	(majątek obrotowy – zapasy – należności) / zobowiązania krótkoterminowe
<i>ZO</i>	zobowiązania ogółem / aktywa ogółem
<i>ZD</i>	zobowiązania długoterminowe / aktywa ogółem
<i>KW</i>	kapitał własny / aktywa ogółem
<i>KWZ</i>	kapitał własny / zobowiązania ogółem
<i>RN</i>	średnia wartość należności / przychody ze sprzedaży netto · 365
<i>RZ</i>	średnia wartość zapasów / przychody ze sprzedaży netto · 365
<i>Rzob</i>	średnia wartość zobowiązań / przychody ze sprzedaży · 365
<i>Rakt</i>	średnia wartość aktywów / przychody ze sprzedaży · 365

Źródło: opracowanie własne.

O jakości skonstruowanego klasyfikatora decyduje poprawność uzyskanych dzięki niemu wyników dotyczących przewidywania (prognozowania) przynależności obiektów, w wypadku których przynależność ta nie jest znana, do rozważanych populacji. Miarą tak zdefiniowanej jakości może być wartość błędu predykcji klasyfikatora. W światowej literaturze przedmiotu opisano badania empiryczne, których celem było przeprowadzenie analizy porównawczej różnych metod szacowania błędu predykcji [Braga-Neto i Dougherty 2004;

Wehberg i Schumacher 2004; Molinaro, Simon i Pfeiffer 2005; Kim 2009]. Dotyczyły one zwykle zastosowania klasyfikatorów w medycynie. Wspólny dla wszystkich tych badań jest wniosek, który można wyciągnąć na podstawie uzyskanych w nich wyników: estymatory błędu predykcji uzyskane za pomocą prostych metod podziału charakteryzują się najwyższą zmiennością spośród wszystkich innych poddanych analizie. W literaturze przedmiotu podkreśla się, że z prostej metody podziału należy korzystać tylko wtedy, gdy dysponuje się dostatecznie dużym zbiorem danych, który pozwala na wyodrębnienie odpowiednio licznych, niezależnych zbiorów treningowego i testowego [Ripley 1996]. W badaniach dotyczących polskiego rynku kapitałowego spełnienie tego warunku jest bardzo trudne.

Z wcześniejszych badań przeprowadzonych przez autora [Herman 2016] wynika, że w wypadku prognozowania upadłości spółek akcyjnych w Polsce estymatory błędu predykcji uzyskane za pomocą metod wielokrotnego repróbkiwania charakteryzują się najbardziej pożądanymi własnościami. Metody należące do tej grupy opierają się na generowaniu B prób typu bootstrap $x^{*1}, x^{*2}, x^{*3}, \dots, x^{*B}$ w taki sposób, że każda z nich powstaje poprzez n -krotne losowanie proste ze zwracaniem obiektów z dostępnej próby n obiektów $[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Próby te są następnie wykorzystywane jako próby treningowe. Obiekty niewylosowane w kolejnych iteracjach stanowią próbę testową. Na podstawie tak wyselekcjonowanych prób szacowany jest następnie prawdziwy błąd predykcji (*true prediction error*). Definiowany jest on często jako błąd predykcji modelu skonstruowanego na podstawie wszystkich n obiektów, a następnie przetestowanego na dużej i niezależnej próbie. W badaniu wykorzystano estymator błędu predykcji 0,632+, zaproponowany przez B. Efrona i R. Tibshiraniego [1997].

4. Analiza zróżnicowania wskaźników finansowych w poszczególnych branżach gospodarki

Wśród założeń przyjmowanych podczas konstruowania funkcji dyskryminacyjnej są te dotyczące rozkładu normalnego oraz równości wariancji w badanych grupach. W pierwszym kroku analizy zweryfikowano hipotezę o tym, że obserwacja dotyczy populacji, w której wartości analizowanych wskaźników mają rozkład normalny. W tym celu wykorzystano test Kołmogorowa-Smirnowa. Okazało się, że jedynie w przypadku wartości trzech wskaźników (KP , ZO oraz KW) dla spółek w dobrej kondycji finansowej oraz jednego wskaźnika (WBP) dla spółek, w wypadku których ogłoszono upadłość, zostało spełnione założenie o rozkładzie normalnym. W kolejnym kroku za pomocą testu Levene'a zbadano równość wariancji wartości poszczególnych wskaźników w obu badanych popu-

lacjach. Tylko w przypadku wartości trzech wskaźników dotyczących sprawności działania (*RN*, *RZ* oraz *Rakt*) nie było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej mówiącej o tym, że w populacjach, z których pochodzą obiekty, występuje jednokowa wariancja. W literaturze przedmiotu podkreśla się, że niespełnienie założeń związanych z liniową analizą dyskryminacyjną nie pogarsza istotnie wyników uzyskanych za pomocą tej metody [Hand 1981, Hadasik 1998], dlatego pomimo niespełnienia wymienionych założeń zdecydowano o jej zastosowaniu.

W celu zweryfikowania, czy w wypadku poszczególnych branż gospodarki średnie wartości wskaźników dla spółek w dobrej kondycji finansowej oraz tych w stanie upadłości różnią się istotnie statystycznie, wykorzystano nieparametryczny test *U* Manna-Whitneya. Tylko w czterech przypadkach dotyczących budownictwa: wskaźników *ZD* ($p\text{-value} = 0,066$), *RN* (0,636), *RZ* (0,451), *Rakt* (0,953), czterech dotyczących przetwórstwa przemysłowego: *ROE* (0,067), *ZD* (0,753), *RN* (0,092), *RZ* (0,081), oraz trzech dotyczących handlu: *ZD* (0,094), *RN* (0,121), *RZ* (0,132), nie można było uznać, że przy poziomie istotności równym 0,05 średnie te różnią się w badanych populacjach. Wartości statystyk dla spółek z sektora przetwórstwa przemysłowego były zdecydowanie wyższe od pozostałych poddanych badaniu.

Ostatnim krokiem wstępnej analizy danych finansowych wykorzystanych w dalszej części badania było porównanie średnich wartości wskaźników finansowych spółek z poszczególnych branż gospodarki. W tym celu ponownie zastosowano test *U* Manna-Whitneya. Badanie przeprowadzono oddzielnie dla spółek w dobrej kondycji finansowej oraz spółek w stanie upadłości. W wypadku dobrze prosperujących spółek średnie wartości dziewięciu wskaźników finansowych (*WSP*, *WPP*, *ZO*, *KW*, *KWZ*, *RN*, *RZ*, *RZob*, *Rakt*) przy poziomie istotności równym 0,05 były różne w poszczególnych branżach gospodarki. Różnice średnich wartości wskaźników finansowych występowały znacznie częściej, gdy analiza dotyczyła spółek w stanie upadłości. Wyłącznie w przypadku trzech wskaźników finansowych: *ROE*, *ZO* oraz *ZD*, przy poziomie istotności równym 0,05 nie można było stwierdzić, że ich średnie wartości są różne w poszczególnych branżach gospodarki.

Analogiczne wnioski wyciągnięto na podstawie weryfikacji hipotezy o równości median wartości badanych wskaźników finansowych, do czego wykorzystano test oparty na statystyce o rozkładzie chi-kwadrat. Stwierdzone różnice mogą świadczyć o potrzebie konstruowania odrębnych modeli do prognozowania upadłości spółek akcyjnych poszczególnych branż gospodarki.

5. Badanie zdolności predykcyjnych modeli dotyczących poszczególnych branż

Punktem wyjścia do skonstruowania oraz ocenienia zdolności predykcyjnych klasyfikatorów dotyczących poszczególnych branż było przyjęcie następujących założeń:

- zbudowane zostaną osobne modele dla 60 spółek z każdej analizowanej branży gospodarki,
- modele zostaną skonstruowane na podstawie liniowej funkcji dyskryminacyjnej oraz wskaźników finansowych przedstawionych w tabeli 1,
- przed procesem uczenia zostaną usunięte te zmienne, które będą silnie skorelowane z pozostałymi (w wypadku których współczynnik korelacji będzie wyższy od 0,90),
- ocena błędu predykcji zostanie przeprowadzona z wykorzystaniem estymatora wielokrotnego repróbkiowania 0,632+, liczba wylosowanych prób typu bootstrap $B = 50$,
- zastosowaną metodą doboru zmiennych do modelu będzie wybór pięciu zmiennych, w wypadku których wartość bezwzględna statystyki t dla testu porównującego średnią wartość wskaźników finansowych w badanych populacjach będzie najwyższa.

Przyjmując opisane założenia, oszacowano prawdziwy błąd predykcji klasyfikatorów dotyczących poszczególnych branż. Wyniki przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Zdolność predykcyjna modeli dotyczących poszczególnych branż

Wyszczególnienie	Branża		
	budownictwo	handel	przetwórstwo przemysłowe
Obiekty klasyfikowane ogółem	1064	1064	1064
Obiekty zaklasyfikowane poprawnie	821	749	950
– w dobrej kondycji finansowej	395	394	503
– w stanie upadłości	426	355	447
Obiekty zaklasyfikowane błędnie	243	315	114
– w dobrej kondycji finansowej	137	138	29
– w stanie upadłości	106	177	85
Oszacowanie błędu predykcji (w %)	21,86	27,67	10,45

Źródło: opracowanie własne.

Z analizy danych zawartych w tabeli 2 wynika, że najmniejszy oszacowany błąd predykcji dotyczy klasyfikatora skonstruowanego dla sektora przetwórstwa prze-

mysłowego. Jest on o ponad 10 pkt proc. mniejszy niż w wypadku branży budownictwa oraz o ponad 17 pkt proc. mniejszy niż w wypadku handlu. Błędy predykcji w odniesieniu do wszystkich trzech branż zostały oszacowane na podstawie próby testowej składającej się z 1064 obiektów. Jest to konsekwencją przyjęcia założeń dotyczących generatora odpowiedzialnego za losowanie prób bootstrap. Takie rozwiązanie umożliwia uśrednienie oszacowanego błędu predykcji modeli odnoszących się do analizowanych branż. Średni błąd predykcji w wypadku modeli dotyczących poszczególnych branż wynosi w przybliżeniu 20%.

Celem badania jest porównanie zdolności predykcyjnej modeli skonstruowanych dla poszczególnych branż i modelu ogólnego, zbudowanego na podstawie danych o wszystkich 180 spółkach akcyjnych, konieczne jest zatem oszacowanie błędu predykcji tego modelu. Przyjęto w tym celu te same założenia co poprzednio, z wyjątkiem pierwszego z nich. Oszacowania błędu predykcji dokonano na dwa różne sposoby: uwzględniając wszystkie 180 spółek jednocześnie oraz biorąc pod uwagę 100 wylosowanych podprób obejmujących 60 przedsiębiorstw z dostępnej próby 180 spółek. Wyniki oceny zdolności predykcyjnych modelu uzyskane pierwszym z wymienionych sposobów przedstawiono w tabeli 3.

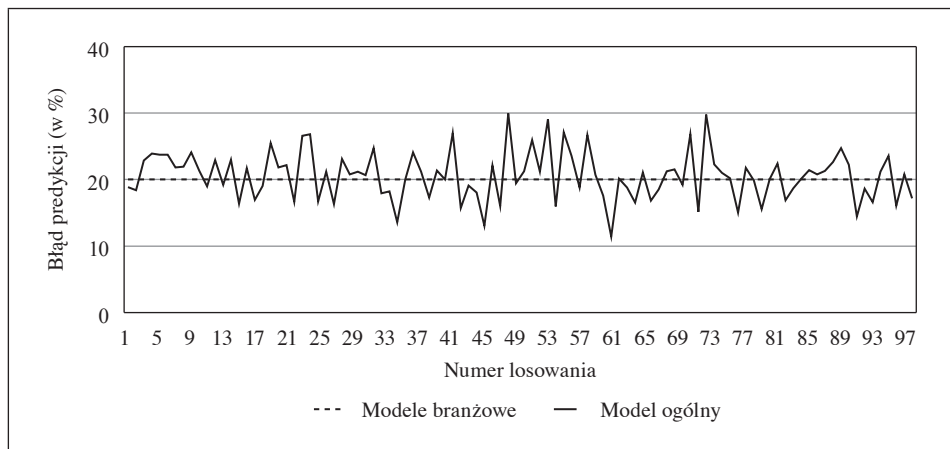
Tabela 3. Zdolność predykcyjna modelu ogólnego

Wyszczególnienie	Liczba spółek
Spółki poddane badaniu ogółem	3278
Spółki zaklasyfikowane poprawnie	2623
– w dobrej kondycji finansowej	1337
– w stanie upadłości	1286
Spółki zaklasyfikowane błędnie	655
– w dobrej kondycji finansowej	302
– w stanie upadłości	353
Oszacowanie błędu predykcji (w %)	19,79

Źródło: opracowanie własne.

Oszacowany błąd predykcji był mniejszy od średniego błędu predykcji modeli dotyczących poszczególnych branż (wynoszącego 20%). Na podstawie szczegółowej analizy wyników klasyfikacji poszczególnych obiektów wykazano ponadto, że model ogólny trafniej klasyfikuje spółki z badanych sektorów gospodarki niż modele skonstruowane dla poszczególnych branż.

Na rys. 1 przedstawiono, jak kształtowały się wartości błędu predykcji modeli ogólnych dla kolejnych 100 wylosowanych podprób obejmujących 60 spółek (oszacowane drugim z wymienionych sposobów) na tle średniego błędu predykcji modeli dotyczących analizowanych branż.



Rys. 1. Błąd predykcji modeli ogólnych dla 100 kolejnych wylosowanych podprób na tle średniego błędu predykcji modeli dotyczących poszczególnych branż
 Źródło: opracowanie własne.

Wykorzystując statystykę t , zweryfikowano hipotezę, że średni błąd predykcji dla 100 wylosowanych podprób jest równy wartości błędu oszacowanego dla modeli dotyczących analizowanych branż (tj. 20%). Wartość statystyki testowej wyniosła 1,546 przy poziomie istotności równym 0,05, nie było więc podstaw do odrzucenia tak sformułowanej hipotezy zerowej.

Na podstawie uzyskanych wyników można zatem stwierdzić, że modele dotyczące poszczególnych branż nie charakteryzują się przeciętnie mniejszym błędem predykcji, a tym samym większą zdolnością predykcyjną, niż model ogólny. Gdy wskaźniki finansowe spółek charakteryzowały się pożądanymi własnościami statystycznymi, czyli wysoką mocą dyskryminacyjną, jak w wypadku przetwórstwa przemysłowego, zarówno modele ogólne, jak i odnoszące się do poszczególnych branż poprawnie prognozowały ryzyko upadłości tych podmiotów.

6. Determinanty upadłości spółek akcyjnych w wybranych branżach gospodarki

W poprzedniej części artykułu porównano zdolność predykcyjną modeli dotyczących poszczególnych branż oraz modelu ogólnego, w którym nie została uwzględniona specyfika branżowa badanych przedsiębiorstw. Zgodnie z podejściem zaproponowanym przez B. Efrona [1983] oszacowano w ten sposób prawdziwy błąd predykcji klasyfikatorów odnoszących się do danej branży zbudowanych na podstawie wyselekcjonowanej próby obiektów.

Pierwszy model uzyskano na podstawie próby składającej się ze spółek reprezentujących sektor budownictwa. Opisano go równaniami w dwóch wersjach, tj. niestandardyzowanej (W) oraz standardyzowanej (SW).

$$D(W) = -0,349 \cdot WBP + 2,397 \cdot MZO + 3,00 \cdot KP + 0,403 \cdot KWZ + 0,841 \cdot KW - 0,419,$$

$$D(SW) = -0,303 \cdot WBP + 0,293 \cdot MZO + 0,664 \cdot KP + 0,460 \cdot KWZ + 0,231 \cdot KW.$$

Model skonstruowano tak, że dodatnie wartości funkcji dyskryminacyjnej świadczą o dobrej kondycji spółek, ujemne wartości wskazują natomiast na złą kondycję finansową spółek, co decyduje o zaklasyfikowaniu ich do grupy podmiotów zagrożonych upadłością. Dodatnie wartości współczynników modelu oznaczają, że im wyższe są wartości tych wskaźników finansowych, tym mniejsze jest prawdopodobieństwo upadłości spółek. Można więc stwierdzić, że wzrost rentowności (mierzonej za pomocą wskaźnika *MZO*) oraz płynności (*KP*) przyczynił się do zmniejszenia ryzyka upadłości analizowanych spółek. Podobnie było w wypadku wskaźników struktury kapitałowo-majątkowej: wzrost udziału kapitału własnego (wzrost wartości wskaźników *KW* oraz *KWZ*) powodował zmniejszenie ryzyka upadłości spółek. W wypadku wskaźnika *WBP* ujemna wartość współczynnika modelu może budzić pewne zastrzeżenia, w literaturze przedmiotu często jednak podkreśla się, że pewien przedział wartości wskaźników płynności jest uznawany za właściwy (zbyt duże odstępstwa od wartości należących do tego przedziału świadczą o złej kondycji finansowej przedsiębiorstwa).

Drugi model do prognozowania upadłości spółek akcyjnych został oszacowany na podstawie danych finansowych dotyczących podmiotów reprezentujących branżę przetwórstwa przemysłowego. Poniżej przedstawiono odpowiednie równania:

$$D(W) = 1,293 \cdot ZB + 4,169 \cdot ZS - 0,432 \cdot ZO + 0,696 \cdot MZO + 0,322 \cdot KWZ + 0,342,$$

$$D(SW) = 0,218 \cdot ZB + 0,492 \cdot ZS - 0,193 \cdot ZO + 0,152 \cdot MZO + 0,458 \cdot KWZ.$$

W tym przypadku, podobnie jak w poprzednim, wzrost rentowności (wskaźniki *ZB*, *ZS* oraz *MZO*) oraz większy udział kapitału własnego w strukturze kapitałowo-majątkowej (*KWZ*) wpłynęły na zmniejszenie prawdopodobieństwa upadłości. Odwrotna sytuacja występuje w wypadku zadłużenia: im stopa zadłużenia ogółem (wskaźnik *ZO*) jest wyższa, tym większe jest ryzyko upadłości przedsiębiorstwa.

Trzeci model został skonstruowany na podstawie próby składającej się ze spółek należących do sektora handlu hurtowego oraz detalicznego. Został opisany następującymi równaniami:

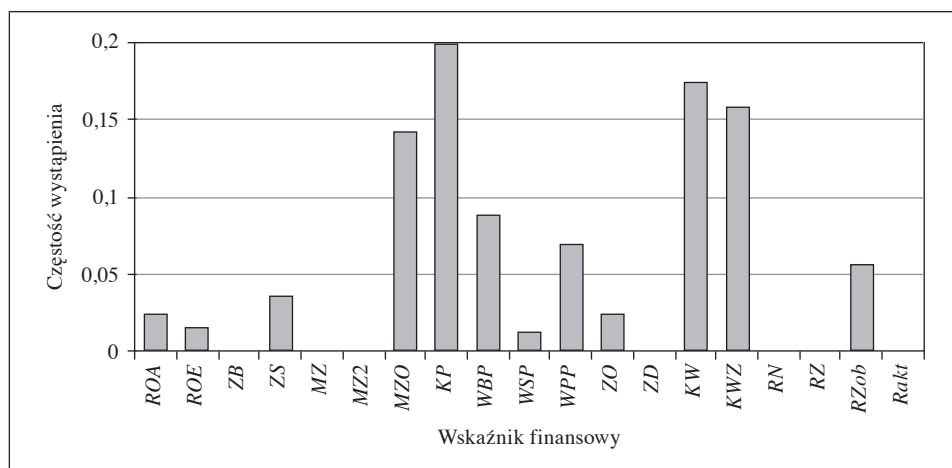
$$D(W) = 1,38 \cdot ROA + 2,41 \cdot MZ2 - 0,364 \cdot WBP - 0,111 \cdot WSP + 0,577 \cdot KWZ - 0,606,$$

$$D(SW) = 0,258 \cdot ROA + 0,375 \cdot MZ2 + 0,310 \cdot WBP - 0,076 \cdot WSP + 0,509 \cdot KWZ.$$

Z przedstawionych zależności wynika, że wzrost rentowności, opisany za pomocą wskaźników *ROA* i *MZ2*, oraz udziału kapitału własnego w strukturze kapitałowo-majątkowej zmniejsza ryzyko upadłości spółek. Jeśli chodzi o wskaźniki płynności, wzrost wartości wskaźnika *WBP* wpływa na zmniejszenie prawdopodobieństwa upadłości firm, w wypadku wskaźnika *WSP* jest natomiast przeciwnie.

Modele oszacowane na podstawie danych o spółkach reprezentujących poszczególne sektory gospodarki są skonstruowane na podstawie odmiennych zestawów wskaźników finansowych. Jedynym wskaźnikiem występującym we wszystkich trzech modelach jest *KWZ*. Dzięki przyjętej metodzie doboru zmiennych stwierdzono, że w poszczególnych branżach gospodarki inne wskaźniki finansowe są istotne w prognozowaniu bankructwa rozpatrywanych spółek.

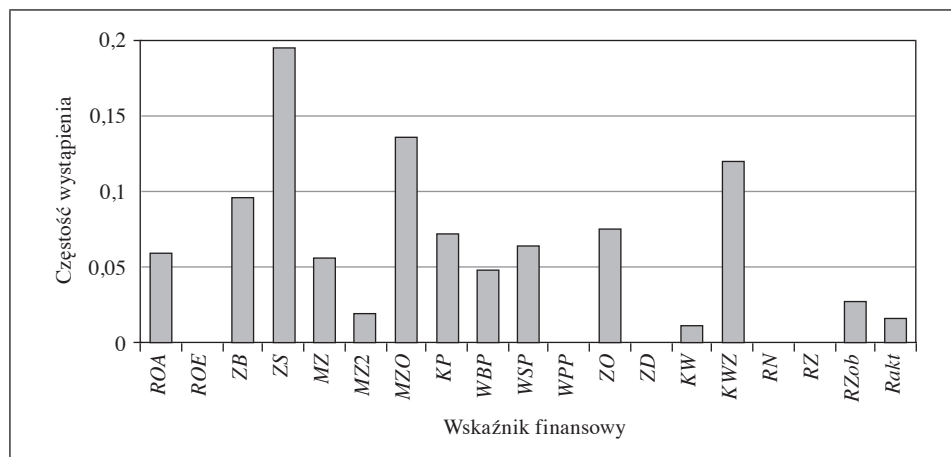
Oszacowanie błędów predykcji modeli dotyczących poszczególnych branż zgodnie z metodą wielokrotnego repróbkiowania wymagało wylosowania 50 prób typu bootstrap. Na ich podstawie 50-krotnie dokonywano doboru zmiennych i konstruowano odpowiedni model. Poddano analizie częstość doboru poszczególnych wskaźników finansowych do konstruowanych modeli wykorzystanych do szacowania prawdziwego błędu predykcji klasyfikatorów odnoszących się do poszczególnych branż (rys. 2–4).



Rys. 2. Częstość doboru poszczególnych wskaźników finansowych do konstruowanych modeli wykorzystanych do szacowania błędu predykcji w wypadku branży budownictwa
Źródło: opracowanie własne.

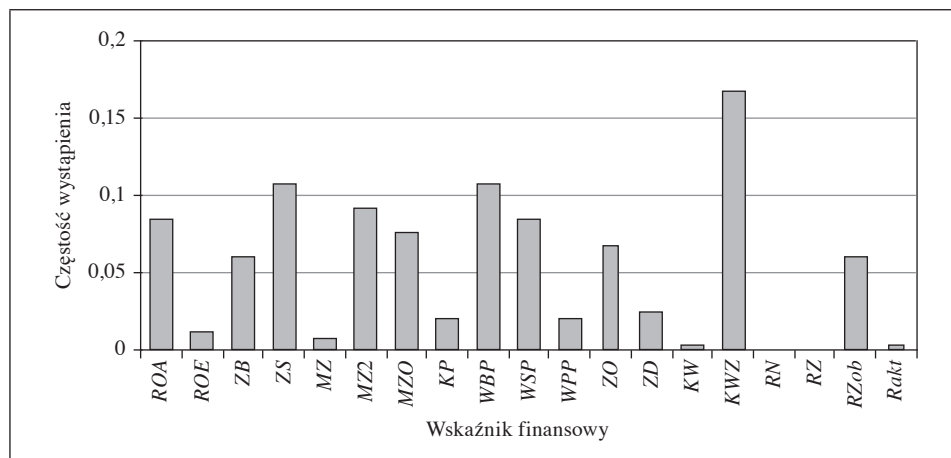
Z analizy danych przedstawionych na rys. 2–4 wynika, że w wypadku każdej analizowanej branży gospodarki częstość doboru poszczególnych wskaźników finansowych do modeli użytych do szacowania błędu predykcji była różna. Najmniej

różnych wskaźników finansowych wykorzystano w wypadku branży budownictwa. Podczas szacowania błędu predykcji odnośnie do branży handlu dwa wskaźniki finansowe (*RN* i *RZ*) w ogóle nie zostały uwzględnione w konstruowanych modelach. By uwidocznić różnice w częstości użycia poszczególnych wskaźników finansowych, pogrupowano je z uwzględnieniem obszarów działalności spółek (rys. 5).



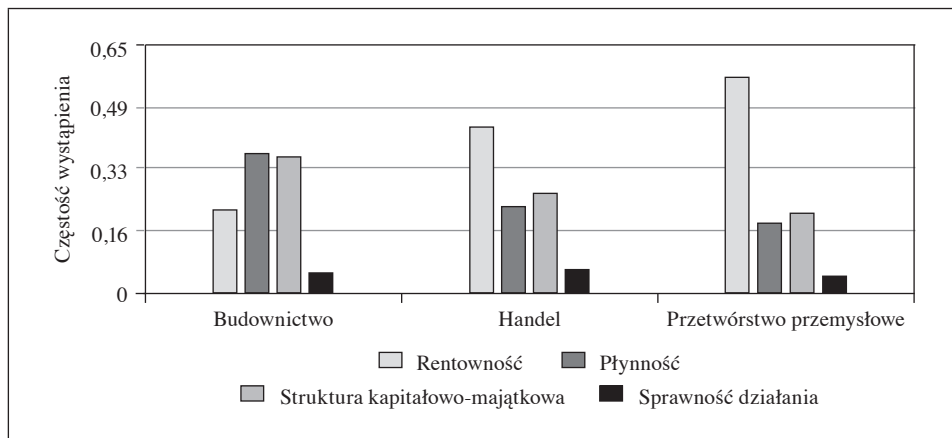
Rys. 3. Częstość doboru poszczególnych wskaźników finansowych do konstruowanych modeli wykorzystanych do szacowania błędu predykcji w wypadku branży przetwórstwa przemysłowego

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Częstość doboru poszczególnych wskaźników finansowych do konstruowanych modeli wykorzystanych do szacowania błędu predykcji w wypadku branży handlu

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 5. Częstość doboru poszczególnych wskaźników finansowych do modeli z uwzględnieniem obszarów działalności spółek

Źródło: opracowanie własne.

Jedyną cechą wspólną modeli skonstruowanych w odniesieniu do badanych branż gospodarki było rzadkie występowanie w nich wskaźników finansowych określających sprawność działania spółek. W wypadku przetwórstwa przemysłowego oraz handlu najistotniejsze okazały się wskaźniki rentowności, podczas gdy w wypadku budownictwa najważniejszą rolę odgrywały wskaźniki charakteryzujące płynność oraz strukturę kapitałowo-majątkową spółek. Porównując modele dotyczące handlu oraz przetwórstwa przemysłowego, można stwierdzić, że częstość doboru poszczególnych wskaźników finansowych dla spółek z tych branż gospodarki była bardzo podobna.

Częstość doboru poszczególnych wskaźników finansowych oraz postać modeli dotyczących poszczególnych sektorów świadczą o tym, że determinanty upadłości spółek akcyjnych w Polsce są inne w wypadku każdej z branż gospodarki. Zasadne jest zatem kontynuowanie badań związanych z konstruowaniem modeli do prognozowania upadłości z uwzględnieniem branż.

7. Podsumowanie

Przedstawione w artykule wyniki analizy dowodzą, że modele odnoszące się do poszczególnych branż nie charakteryzują się przeciętnie niższą wartością błędu predykcji, a tym samym większą zdolnością prognostyczną, niż modele ogólne. Tylko w wypadku przetwórstwa przemysłowego błąd predykcji modelu dotyczą-

cego tej branży był mniejszy od tego uzyskanego w wyniku zastosowania modelu ogólnego.

Dodatkowym celem przeprowadzenia badania było ustalenie determinant upadłości spółek akcyjnych w analizowanych branżach gospodarki. Wzięto pod uwagę zarówno postać modeli skonstruowanych dla poszczególnych branż, jak i zmienne użyte w modelach wykorzystanych do oszacowania wartości ich prawdziwych błędów predykcji. Na tej podstawie stwierdzono, że determinanty upadłości spółek akcyjnych w Polsce są różne w poszczególnych branżach gospodarki. Konstruowanie modeli do prognozowania upadłości z uwzględnieniem branży przedsiębiorstwa jest zatem zasadne, choć nie zawsze prowadzi do uzyskania modeli o istotnie większej zdolności predykcyjnej.

Na wyniki uzyskane w przedstawionym w artykule badaniu mogło wpłynąć to, że analizowane spółki akcyjne, nawet jeśli zostały zaliczone do jednej branży gospodarki, często prowadziły bardzo zróżnicowaną działalność (odpowiadającą różnym działom w klasyfikacji PKD). W ramach dalszych badań warto powtórzyć analizę, uwzględniając przedsiębiorstwa prowadzące bardziej jednorodną działalność gospodarczą zamiast brania pod uwagę spółek o takiej samej formie prawnej.

Opisane w pracy badania można również rozszerzyć, stosując inną metodykę przeprowadzania analizy. Warto przede wszystkim wykorzystać inne metody prognozowania upadłości przedsiębiorstw, np. popularne ostatnio metody zaliczane do miękkich technik obliczeniowych.

Literatura

- Altman E.I. [1983], *Corporate Financial Distress: A Complete Guide to Predicting, Avoiding, and Dealing with Bankruptcy*, Wiley, New York.
- Braga-Neto U.M., Dougherty E.R. [2004], *Is Cross-validation Valid for Small-sample Microarray Classification?*, „Bioinformatics”, vol. 20, nr 3, <https://doi.org/10.1093/bioinformatics/btg419>.
- Efron B. [1983], *Estimating the Error Rate of a Prediction Rule: Improvement on Cross-validation*, „Journal of the American Statistical Association”, vol. 78, nr 382, <https://doi.org/10.1080/01621459.1983.10477973>.
- Efron B., Tibshirani R. [1997], *Improvements on Cross-validation: The 632+ Bootstrap Method*, „Journal of the American Statistical Association”, vol. 92, nr 438, <https://doi.org/10.1080/01621459.1997.10474007>.
- Grzegorzewska E. [2011], *Zagrożenie upadłością a cykl życia przedsiębiorstw rolniczych* [w:] *Cykle życia i bankructwa przedsiębiorstw*, red. E. Mączyńska, Oficyna Wydawnicza Szkoły Głównej Handlowej w Warszawie, Warszawa.
- Hadasik D. [1998], *Upadłość przedsiębiorstw w Polsce i metody jej prognozowania*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.
- Hand D.J. [1981], *Discrimination and Classification*, Wiley, Chichester.

- Herman S. [2016], *Analiza porównawcza wybranych metod szacowania błędu predykcji klasyfikatora*, „Przegląd Statystyczny”, t. 63, z. 4.
- Herman S. [2017], *Industry Specifics of Joint-stock Companies in Poland and Their Bankruptcy Prediction* [w:] *The 11th Professor Aleksander Zelias International Conference on Modelling and Forecasting of Socio-economic Phenomena. Conference Proceedings*, red. M. Papież, S. Śmiech, Foundation of the Cracow University of Economics, Cracow.
- Hołda A. [2006], *Zasada kontynuacji działalności i prognozowanie upadłości w polskich realiach gospodarczych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- Hołda A. [2009], *Wykorzystanie drzew decyzyjnych w prognozowaniu upadłości przedsiębiorstw w branży budowlanej*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, nr 796.
- Juszczyk S. [2010], *Prognozowanie upadłości przedsiębiorstw*, „Ekonomista”, nr 5.
- Juszczyk S., Balina R. [2014], *Prognozowanie zagrożenia bankructwem przedsiębiorstw w wybranych branżach*, „Ekonomista”, nr 1.
- Kim J. [2009], *Estimating Classification Error Rate: Repeated Cross-validation, Repeated Hold-out and Bootstrap*, „Computational Statistics & Data Analysis”, vol. 53, nr 11, <https://doi.org/10.1016/j.csda.2009.04.009>.
- Kitowski J. [2012], *Sposoby ujmowania kryterium specyfiki branżowej w metodach oceny kondycji finansowej przedsiębiorstwa*, „Zarządzanie i Finanse”, t. 10, nr 4, cz. 1.
- Korol T. [2005], *Wykorzystanie sieci jednokierunkowej wielowarstwowej oraz sieci rekurencyjnej w prognozowaniu upadłości przedsiębiorstw* [w:] *Zagrożenie upadłością*, red. K. Kuciński, E. Mączyńska, Materiały i Prace Instytutu Funkcjonowania Gospodarki Narodowej, t. 93, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Warszawa.
- Molinaro A.M., Simon R., Pfeiffer R.M. [2005], *Prediction Error Estimation: A Comparison of Resampling Methods*, „Bioinformatics”, vol. 21, nr 15, <https://doi.org/10.1093/bioinformatics/bti499>.
- Pawełek B., Grochowina D. [2017], *Podejście wielomodelowe w prognozowaniu zagrożenia przedsiębiorstw upadłością w Polsce*, „Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu”, nr 468, <https://doi.org/10.15611/pn.2017.468.17>.
- Pociecha J., Baryła M., Pawełek B. [2015], *Porównanie skuteczności klasyfikacyjnej wybranych metod prognozowania bankructwa przedsiębiorstw przy losowym i nielosowym doborze prób*, „Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu”, nr 384, <https://doi.org/10.15611/pn.2015.384.25>.
- Potoczna M., Wiśniewska O. [2013], *Zastosowanie analizy dyskryminacyjnej oraz modelu logitowego do prognozowania upadłości polskich przedsiębiorstw* [w:] *Metody i techniki diagnostyczne w doskonaleniu organizacji*, red. S. Wawak, Mfiles.pl, Kraków.
- Prusak B. [2011], *Zalety i ograniczenia modeli prognozowania zagrożenia przedsiębiorstw upadłością* [w:] *Ekonomia i prawo upadłości przedsiębiorstw. Zarządzanie przedsiębiorstwem w kryzysie*, red. S. Morawska, Oficyna Wydawnicza Szkoły Głównej Handlowej w Warszawie, Warszawa.
- Ripley B.D. [1996], *Pattern Recognition and Neural Networks*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Rybicki P. [2002], *Ocena ryzyka upadku przedsiębiorstwa*, „Manager”, nr 7.
- Wehberg S., Schumacher M. [2004], *A Comparison of Nonparametric Error Rate Estimation Methods in Classification Problems*, „Biometrical Journal”, vol. 46, nr 1, <https://doi.org/10.1002/bimj.200410011>.

Predicting Bankruptcy and the Industry Specifics of Joint-stock Companies in Poland

Bankruptcy is a characteristic of every developed market economy. Numerous attempts have been made to predict it. One way this has been done in research is by building models which are based on the characteristics of the industry companies operate in. Due to the difficulty of gathering a large enough research sample, Polish researchers rarely try to build models for certain industries. This article reviews the empirical research related to this issue. The first aim of empirical research is to compare prediction errors of both industry and general models. The second was to define the determinants of joint-stock company bankruptcy in particular industries. Empirical studies were conducted on 180 joint-stock companies in the Polish capital market. Calculations were performed using the bootstrapping method and multivariate discriminant analysis.

Keywords: bankruptcy, predicting, discriminant analysis, industry specifics.

Jacek Batóg

Krzysztof Dmytrów

Ekonometryczna analiza produktywności kapitału w krajach Unii Europejskiej

Streszczenie

W artykule przedstawiono wyniki analizy kształtowania się produktywności kapitału w wybranych krajach Unii Europejskiej w latach 2000–2014. Na podstawie jednoczynnikowej funkcji produkcji obliczone zostały zmiany tej zmiennej z wykorzystaniem zarówno danych w postaci szeregów czasowych, jak i danych przekrojowych. Zastosowane narzędzie badawcze pozwoliło na określenie prawidłowości występujących dla poszczególnych krajów oraz w całej Unii Europejskiej. Do najważniejszych zaobserwowanych prawidłowości należą istotny wpływ kryzysu gospodarczego, mającego początek w 2008 r., na kształtowanie się spadkowego trendu produktywności kapitału w krajach Unii Europejskiej oraz występowanie znaczących różnic tej wielkości w ujęciu międzynarodowym. Sformułowane wnioski mogą stanowić przesłanki dla inwestorów, których decyzje oparte są często na analizie zwrotu z zainwestowanego kapitału, a w szerszym ujęciu mogą stanowić informację o przyszłych kierunkach przepływu kapitału i w konsekwencji o zmianach poziomu zatrudnienia w Unii Europejskiej.

Słowa kluczowe: produktywność kapitału, funkcja produkcji, Unia Europejska, modelowanie ekonometryczne.

Klasyfikacja JEL: C51, E23, D24, O47.

Jacek Batóg, Uniwersytet Szczeciński, Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania, Instytut Ekonometrii i Statystyki, Katedra Ekonometrii, ul. Mickiewicza 64, 71-101 Szczecin, e-mail: jacek.batog@usz.edu.pl

Krzysztof Dmytrów, Uniwersytet Szczeciński, Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania, Instytut Ekonometrii i Statystyki, Katedra Badań Operacyjnych i Zastosowań Matematyki w Ekonomii, ul. Mickiewicza 64, 71-101 Szczecin, e-mail: krzysztof.dmytrow@usz.edu.pl

1. Wprowadzenie

Jedno z kluczowych pytań badawczych formułowanych w obszarze makroekonomii dotyczy przyczyn wzrostu gospodarczego. Poszukuje się w tym przypadku przede wszystkim czynników o uniwersalnym charakterze, odznaczających się stałością zarówno w czasie, jak i w przestrzeni. W większości modeli wzrostu gospodarczego podstawowym czynnikiem tego wzrostu jest akumulacja kapitału rzeczowego. W modelach neoklasycznych przyjmuje się założenie malejącej krańcowej produktywności tego kapitału, przy jednoczesnej egzogeniczności zasobów pracy oraz postępu technicznego. W modelach wskazujących na endogeniczny charakter wzrostu gospodarczego założenie to jest uchylane¹, a ich twórcy wskazują zróżnicowane czynniki powodujące dodatnie efekty skali poszczególnych rodzajów kapitału [Batóg 2010]. Istotna rola kapitału rzeczowego podkreślana jest również w teoriach rozwoju regionalnego, według których niski zasób i wysoki zwrot z kapitału w krajach mniej rozwiniętych, w połączeniu z malejącą produktywnością kapitału w krajach bardziej rozwiniętych, jest główną przyczyną jego przepływu oraz szybszego wzrostu gospodarczego tych pierwszych². Jeżeli zjawisko to ma charakter długookresowy, to powinno prowadzić do zbieżności łącznej produktywności czynników produkcji oraz konwergencji realnej [Tsonas 2000, s. 297]. Warto jednak zauważyć, że jeżeli główną determinantą konwergencji realnej jest technologia, a nie kapitał, to obserwujemy wówczas wyłącznie konwergencję dochodową o charakterze klubowym [Nowak 2006, s. 253].

Precyzyjne określenie relacji między poziomem i zmianami kapitału rzeczowego a wzrostem gospodarczym nie jest zadaniem łatwym. Nie tylko ze względu na trudności związane z konstrukcją odpowiednich modeli, lecz również z powodu ograniczeń występujących w procesie pomiaru produktywności kapitału. O ile jest to stosunkowo mało skomplikowane na poziomie firm, o tyle zdecydowanie więcej problemów spotykamy w tym zakresie na poziomie sektorowym, a największe trudności pojawiają się w przypadku pomiaru dokonywanego w skali całej gospodarki [*Technology...* 1998, s. 44]³.

Znaczenie kapitału rzeczowego należy rozpatrywać w dwóch aspektach – pierwszy to istniejący zasób kapitału, a drugi jego produktywność. W pierwszym przypadku obserwujemy w krajach Unii Europejskiej stały wzrost. Średnie tempo zmian w latach 2000–2014 dla całej UE wyniosło 3,3%, a w poszczególnych

¹ Podkreśla się m.in., że zmiany zasobów kapitału rzeczowego determinują szybkość postępu technicznego, który jest głównym czynnikiem wzrostu gospodarczego [Boskin i Lau 2000, s. 3].

² Zależności te nie zawsze znajdują jednak potwierdzenie w wynikach prowadzonych badań – zob. np. [Gourinchas i Jeanne 2013].

³ Zjawisko to odnosi się również do pomiaru wydajności pracy.

krajach wahało się od 2,4% dla Niemiec do 9,9% w przypadku Estonii. Nieco trudniej jest określić produktywność tego czynnika produkcji. W tym celu najczęściej wykorzystuje się funkcję produkcji. To narzędzie ekonometryczne zostało również zastosowane w niniejszym badaniu. Podstawowym celem pracy była analiza kształtowania się produktywności kapitału rzeczowego (niefinansowego) w krajach Unii Europejskiej w latach 2000–2014⁴. Skonstruowane modele pozwoliły ocenić nie tylko, jakie tendencje obserwujemy w badanym okresie w poszczególnych krajach, lecz również zmianę poziomu produktywności kapitału w całej Unii Europejskiej, wskazując jednocześnie wpływ ostatniego kryzysu gospodarczego na to zjawisko. Opierając się na wykorzystanych narzędziach badawczych, weryfikacji poddano dwie hipotezy. Pierwsza zakłada, że kraje Unii Europejskiej charakteryzuje zróżnicowanie produktywności niefinansowego kapitału rzeczowego oraz, jak wskazuje neoklasyczna teoria wzrostu, poziom tej zmiennej jest wyższy w grupie krajów mniej rozwiniętych, posiadających niższy poziom kapitału przypadającego na jednego zatrudnionego. Druga hipoteza jest odzwierciedleniem endogenicznych teorii wzrostu i zakłada, że wyższą dynamiką wzrostu kapitału rzeczowego odznaczają się kraje o wyższym poziomie jego produktywności.

2. Metoda badawcza

Podstawowym narzędziem badawczym zastosowanym w pracy była jednoczynnikowa funkcja produkcji w ujęciu dynamicznym i przekrojowym⁵. Analiza w ujęciu dynamicznym pozwoliła na zbadanie, jak kształtowała się produktywność niefinansowego majątku trwałego w poszczególnych państwach Unii Europejskiej, a ujęcie przekrojowe umożliwiło przeprowadzenie analizy dla całej UE w badanym okresie. Funkcja produkcji w ujęciu dynamicznym ma postać:

$$WDB_{it} = \alpha_{0i} \cdot NMT_{it}^{\alpha_{1i}} \cdot e^{u_{it}}, \quad (1)$$

gdzie:

WDB_{it} – wartość dodana brutto w i -tym państwie w t -tym roku,

NMT_{it} – niefinansowy majątek trwały w i -tym państwie w t -tym roku,

α_{1i} – produktywność majątku trwałego w i -tym państwie rozumiana jako jego elastyczność.

⁴ Obszerne studium badawcze dotyczące weryfikacji neoklasycznej hipotezy o malejącej krańcowej produktywności kapitału oraz wyjaśniające różnice w poziomie tej zmiennej występujące w próbie 84 krajów w okresie 1980–2011 stanowi praca [Nell i Thirlwall 2014].

⁵ Por. model zaproponowany w pracy [Nell i Thirlwall 2014, s. 12], w którym krańcowa produktywność kapitału jest traktowana jako zmienna zależna, oraz metodologię rachunku produktywności KLEMS stosowaną w Unii Europejskiej [Jäger 2016].

Szacując model dany równaniem (1) należy pamiętać, że występowanie zbliżonych trendów obu zmiennych może powodować efekt w postaci regresji pozornej. W celu identyfikacji tego zjawiska sprawdzono, jak zachowują się rozważane modele po wprowadzeniu zmiennej czasowej t . Z dwoma wyjątkami (dla Danii i Grecji), wprowadzenie zmiennej czasowej nie poprawiło wyników, a często wręcz je pogorszyło, powodując dodatkowo występowanie autokorelacji składnika losowego (Szwecja, Polska).

Funkcję produkcji w ujęciu przekrojowym przedstawia równanie:

$$WDB_{it} = \alpha_{0t} \cdot NMT_{it}^{\alpha_{1t}} \cdot e^{u_{it}}, \quad (2)$$

gdzie:

WDB_{it} – wartość dodana brutto w t -tym roku w i -tym państwie,

NMT_{it} – niefinansowy majątek trwały w t -tym roku w i -tym państwie,

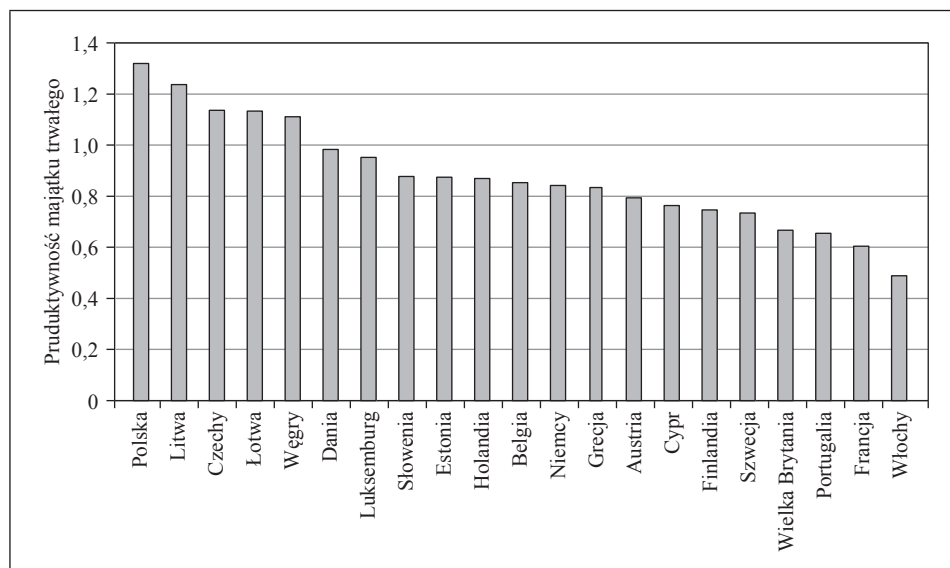
α_{1t} – produktywność majątku trwałego w t -tym roku rozumiana jako jego elastyczność.

Należy zaznaczyć, że klasyczna funkcja produkcji, oprócz badania produktywności majątku trwałego, umożliwia także ocenę produktywności zatrudnienia. Podczas prowadzonych analiz okazało się jednak, że wprowadzenie do modelu zatrudnienia spowodowało znaczne pogorszenie jakości modeli, co wynikało przede wszystkim ze współliniowości tych zmiennych oraz zmiany tendencji kształtowania się zatrudnienia w okresie pokryzysowym.

3. Wyniki empiryczne

Dane wykorzystane w badaniu dotyczą 21 państw Unii Europejskiej i obejmują okres 2000–2014. Ich źródłem jest baza danych Eurostatu. Z powodu występujących braków danych w analizach nie zostały uwzględnione: Bułgaria, Chorwacja, Hiszpania, Irlandia, Malta, Rumunia oraz Słowacja. Wartość dodana brutto pochodziła z tablicy „Gross value added and income by A*10 industry breakdowns” (<http://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/submitViewTableAction.do>, data dostępu: 11.01.2017), a wartość niefinansowego majątku trwałego – z tablicy „Balance sheets for non-financial assets” (<http://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/submitViewTableAction.do>, data dostępu: 11.01.2017).

W pierwszej kolejności przeanalizowano produktywność niefinansowych aktywów trwałych za pomocą modelu opisanego równaniem (1) w poszczególnych państwach w latach 2000–2014. Oceny parametru α_{1t} dla poszczególnych państw przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Produktywność niefinansowego majątku trwałego w krajach Unii Europejskiej w latach 2000–2014

Źródło: obliczenia i opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.

Oceny parametrów α_i , wraz z miarami pozwalającymi ocenić istotność parametrów strukturalnych, stopień dopasowania modeli do danych empirycznych oraz występowanie autokorelacji składnika losowego przedstawiono w tabeli 1.

Uzyskane wyniki potwierdzają teorię mówiącą o wyższej produktywności majątku trwałego w krajach niżej rozwiniętych (najwyższą produktywność zaobserwowano w Polsce, Litwie, Czechach, Łotwie i na Węgrzech, a najniższą – we Włoszech, Francji, Portugalii, Wielkiej Brytanii i Szwecji). W Polsce była ona w badanym okresie najwyższa – zwiększenie zasobów niefinansowego majątku trwałego o 1% powodowało przeciętny wzrost wartości dodanej brutto o 1,32%. We Włoszech z kolei jednoprocenowy wzrost tej zmiennej powodował przeciętny wzrost wartości dodanej brutto o niecałe 0,49%. Możemy zauważyć, że w poszczególnych państwach Unii Europejskiej w badanym okresie występowało bardzo duże zróżnicowanie produktywności niefinansowego majątku trwałego⁶. Parametry strukturalne wszystkich przedstawionych modeli były istotne statystycznie.

⁶ Jak wskazują dotychczasowe wyniki badań dotyczących przyczyn międzynarodowego zróżnicowania produktywności kapitału, jest ono przede wszystkim skutkiem różnic w poziomie: edukacji, wydatków rządowych, położenia geograficznego, dynamiki eksportu, otwartości gospodarki, wolności politycznej oraz makroekonomicznej stabilności [Nell i Thirlwall 2014].

Dopasowanie modeli było wysokie i zawierało się w przedziale od 72% dla Grecji do 99,3% dla Belgii. Niestety, w sześciu przypadkach występowała autokorelacja składnika losowego (dla Czech, Grecji, Węgier, Słowenii oraz Wielkiej Brytanii). Także w dziewięciu na 21 przypadków wartość współczynnika determinacji liniowej była wyższa od wartości statystyki Durбина-Watsona, co może sugerować istnienie regresji pozornej.

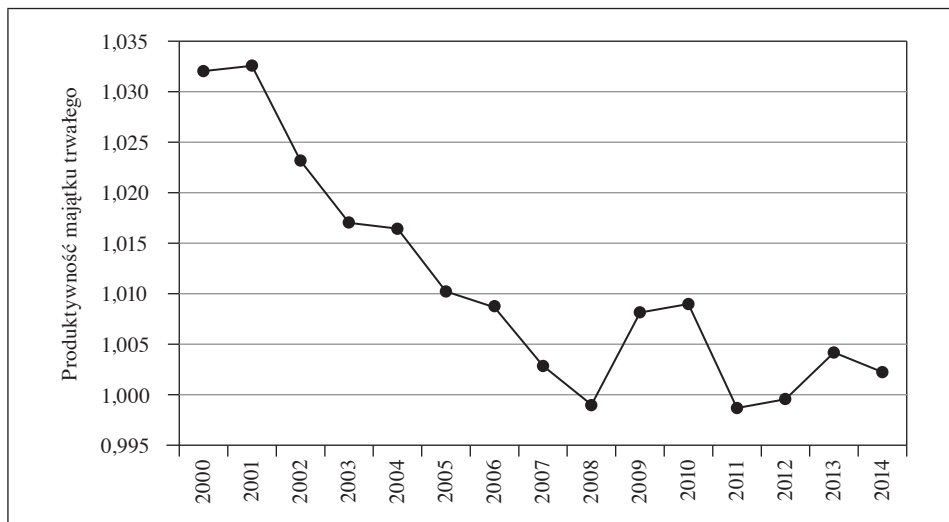
Tabela 1. Podstawowe statystyki dla modelu (1)

Kraj	$\hat{\alpha}_{1i}$	$D(\hat{\alpha}_{1i})$	t	Wartość p	R^2 (w %)	D-W
Austria	0,794	0,027	29,246	0,0000	98,50	0,803
Belgia	0,853	0,020	43,618	0,0000	99,32	1,012
Cypr	0,764	0,023	32,669	0,0000	98,80	0,999
Czechy	1,136	0,028	40,339	0,0000	99,21	0,550
Dania	0,983	0,033	29,747	0,0000	98,55	0,722
Estonia	0,874	0,034	25,584	0,0000	98,05	1,279
Finlandia	0,747	0,038	19,812	0,0000	96,79	1,266
Francja	0,604	0,015	40,439	0,0000	99,21	1,040
Grecja	0,833	0,145	5,765	0,0001	71,88	0,163
Holandia	0,869	0,037	23,249	0,0000	97,65	1,087
Litwa	1,237	0,035	35,274	0,0000	98,97	1,439
Luksemburg	0,952	0,040	23,717	0,0000	97,74	1,143
Łotwa	1,133	0,073	15,614	0,0000	94,94	0,896
Niemcy	0,842	0,043	19,705	0,0000	96,76	1,265
Polska	1,320	0,051	25,916	0,0000	98,10	1,235
Portugalia	0,654	0,027	23,815	0,0000	97,76	1,057
Słowenia	0,877	0,062	14,113	0,0000	93,87	0,461
Szwecja	0,734	0,037	19,827	0,0000	96,80	1,383
Węgry	1,111	0,082	13,618	0,0000	93,45	0,436
Wielka Brytania	0,667	0,097	6,880	0,0000	78,45	0,635
Włochy	0,488	0,044	11,126	0,0000	90,50	0,423

Oznaczenia: $\hat{\alpha}_{1i}$ – ocena produktywności majątku trwałego w i -tym państwie, $D(\hat{\alpha}_{1i})$ – błąd standardowy, t – wartość statystyki t -Studenta, R^2 – współczynnik determinacji liniowej, D-W – wartość statystyki Durбина-Watsona.

Źródło: obliczenia i opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.

Interesujące okazało się również badanie zmian produktywności niefinansowego majątku trwałego w analizowanych państwach Unii Europejskiej w kolejnych latach. Uzyskane wyniki zobrazowano na rys. 2.



Rys. 2. Produktywność niefinansowego majątku trwałego w Unii Europejskiej w latach 2000–2014

Źródło: obliczenia i opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.

Oceny parametrów α_{1t} wraz z miarami pozwalającymi ocenić istotność parametrów strukturalnych oraz stopień dopasowania modeli do danych empirycznych przedstawiono w tabeli 2.

Analizując wyniki przedstawione na rys. 2 możemy stwierdzić, że w badanym okresie produktywność majątku trwałego malała, lecz jej zmiany nie były znaczące (w 2001 r. ocena parametru α_{1t} była najwyższa i wyniosła 1,033, a w 2011 r. najniższa i równa 0,999)⁷. Oznacza to, że w 2001 r. w Unii Europejskiej przyrost niefinansowego majątku trwałego o 1% powodował średni przyrost wartości dodanej brutto o 1,03%, a w 2011 r. – o niecały procent. Widać także, że do 2008 r. produktywność ta w niewielkim stopniu malała, a po tym roku oscylowała wokół wartości 1,0058. Podobnie jak dla ujęcia dynamicznego, także w ujęciu przekrojowym wszystkie parametry strukturalne były statystycznie istotne, a dopasowanie modeli wynosiło ponad 97%.

⁷ Jednocześnie obserwowana była lustrzana tendencja w przypadku TFP mierzonej wartością oceny wyrazu wolnego, która do 2008 r. rosła, a następnie ustabilizowała się na pewnym poziomie.

⁸ Uzyskane wyniki są rozbieżne z wynikami zaprezentowanymi w pracy [Gehring 2013], w której wskazuje się pozytywny wpływ liberalizacji przepływów finansowych, będącej skutkiem integracji europejskiej, na wzrost gospodarczy i wzrost produktywności kapitału rzeczowego. Wykazują jednocześnie podobieństwo do rezultatów uzyskanych w pracy [Montes-Solla, Faiña i Lopez-Rodriguez 2015], w której stwierdzono spadek produktywności kapitału w Hiszpanii w latach 1989–2010.

Tabela 2. Podstawowe statystyki dla modelu (2)

Rok	$\hat{\alpha}_{1t}$	$D(\hat{\alpha}_{1t})$	t	Wartość p	R^2 (w %)
2000	1,032	0,013	80,927	0,0000	97,12
2001	1,033	0,010	102,006	0,0000	97,68
2002	1,023	0,009	110,307	0,0000	97,82
2003	1,017	0,009	114,305	0,0000	97,87
2004	1,016	0,009	119,049	0,0000	97,94
2005	1,010	0,008	119,024	0,0000	97,90
2006	1,009	0,010	99,754	0,0000	97,45
2007	1,003	0,010	100,004	0,0000	97,39
2008	0,999	0,010	98,712	0,0000	97,31
2009	1,008	0,010	96,793	0,0000	97,30
2010	1,009	0,011	94,283	0,0000	97,25
2011	0,999	0,011	92,303	0,0000	97,15
2012	1,000	0,011	90,261	0,0000	97,09
2013	1,004	0,011	95,462	0,0000	97,24
2014	1,002	0,009	111,647	0,0000	97,64

Oznaczenia: $\hat{\alpha}_{1t}$ – ocena produktywności majątku trwałego w t -tym roku, $D(\hat{\alpha}_{1t})$ – błąd standardowy, t – wartość statystyki t -Studenta, R^2 – współczynnik determinacji liniowej.

Źródło: obliczenia i opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.

Następnie zbadano poziom niefinansowego majątku trwałego przypadającego na jednego zatrudnionego (czyli techniczne uzbrojenie pracy) w ostatnim badanym roku. Pozwoliło to wyróżnić dwie grupy państw – pierwszą utworzyły państwa o wartości technicznego uzbrojenia pracy poniżej 200 tys. euro na zatrudnionego, a drugą grupę – państwa o wartości tego wskaźnika powyżej 200 tys. euro na zatrudnionego (zob. tabela 3).

W drugiej grupie występowały państwa będące na wyższym poziomie rozwoju społeczno-ekonomicznego, z jednym wyjątkiem, który stanowiła Wielka Brytania. Spowodowane jest to specyfiką brytyjskiej gospodarki, w której znacznie większą rolę odgrywają aktywa finansowe. Udział aktywów finansowych w aktywach ogółem w Wielkiej Brytanii był największy (poza niewielkimi i raczej nietypowymi gospodarkami Luksemburga i Cypru) i wynosił w 2014 r. ponad 88% (dla przykładu w gospodarkach podobnej wielkości – niemieckiej, francuskiej i włoskiej – udziały te wynosiły, odpowiednio, 71,3%, 78% i 68,4%).

Obie grupy państw różniły się zasadniczo pod względem tempa zmian nakładów brutto na środki trwałe. W tabeli 4 przedstawiono zmianę nakładów brutto na środki trwałe w całym badanym okresie oraz w okresie przedkryzysowym.

Tabela 3. Państwa Unii Europejskiej według poziomu niefinansowego majątku trwałego przypadającego na jednego zatrudnionego

Grupa 1	Grupa 2
Cypr	Austria
Czechy	Belgia
Estonia	Dania
Grecja	Finlandia
Litwa	Francja
Łotwa	Holandia
Polska	Luksemburg
Portugalia	Niemcy
Słowenia	Szwecja
Węgry	Włochy
Wielka Brytania	–

Źródło: opracowanie własne.

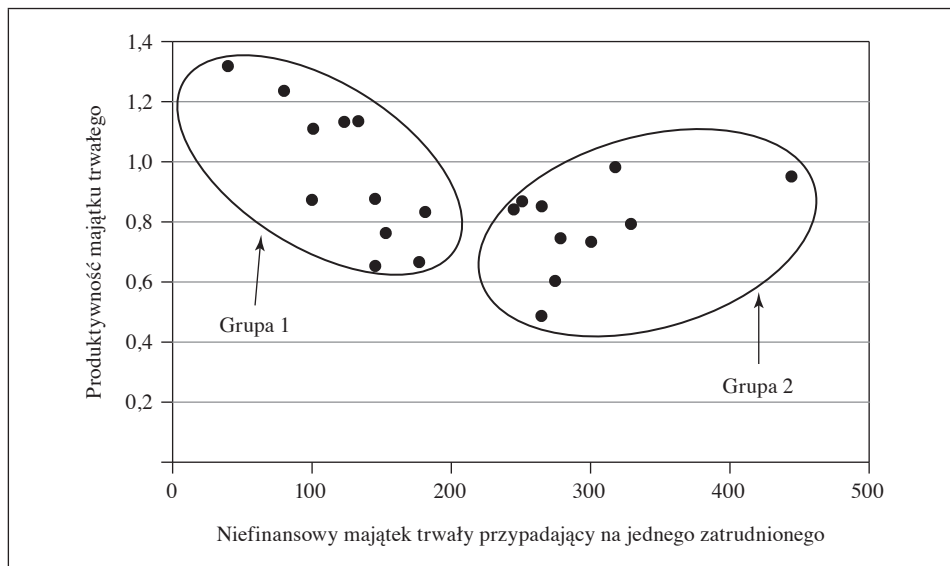
Tabela 4. Względna zmiana nakładów brutto na środki trwałe (w %)

Grupa	Względna zmiana nakładów brutto	
	2008/2000	2014/2000
1	141,4	73,4
2	38,7	38,2

Źródło: opracowanie własne.

Można zauważyć, że od początku badanego okresu do początku kryzysu finansowego nakłady brutto na środki trwałe w pierwszej grupie zwiększyły się o ponad 140%, a w krajach z grupy drugiej wzrost ten kształtował się na poziomie prawie 39%. Z kolei jeżeli weźmiemy pod uwagę cały badany okres, to okazuje się, że w pierwszej grupie nakłady brutto na środki trwałe zwiększyły się o 73%, a w grupie drugiej – o 38%. Świadczy to o tym, że po kryzysie w pierwszej grupie krajów nastąpił znaczący spadek inwestycji w środki trwałe, a w grupie drugiej utrzymywały się one na względnie stałym poziomie.

Interesująco przedstawia się również zależność produktywności majątku trwałego przypadającego na jednego zatrudnionego od jego poziomu (rys. 3). W pierwszej grupie rozważana zależność była ujemna, a w drugiej grupie dodatnia. Potwierdza to teorię malejącej krańcowej produktywności kapitału dla państw o niskim poziomie aktywów oraz teorię wzrostu endogenicznego dla państw o wysokim poziomie aktywów, która zakłada brak malejącej krańcowej wydajności kapitału ze względu na inne czynniki wywołujące dodatnie efekty skali.

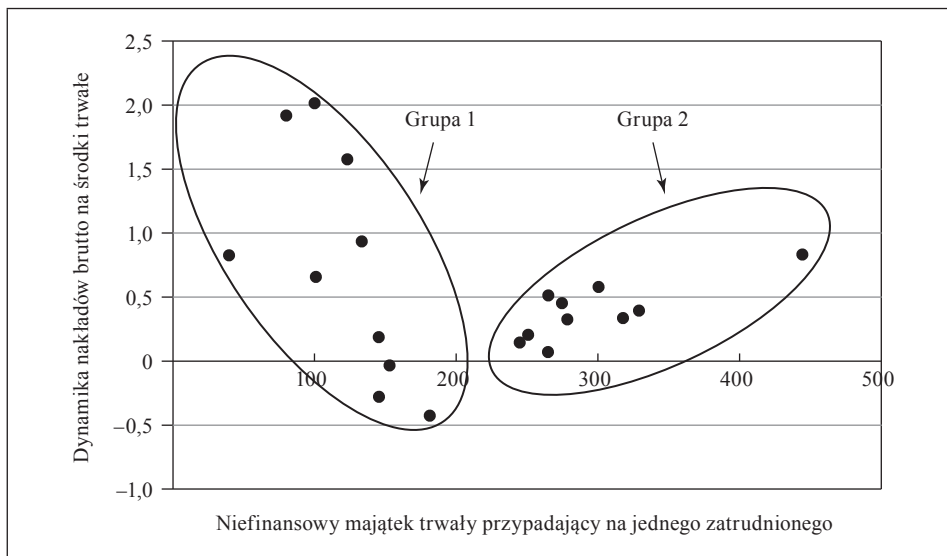


Rys. 3. Zależność między produktywnością (2000–2014) a poziomem niefinansowego majątku trwałego przypadającego na jednego zatrudnionego (wartość majątku z 2014 r., w tys. euro) w krajach Unii Europejskiej

Źródło: obliczenia i opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.

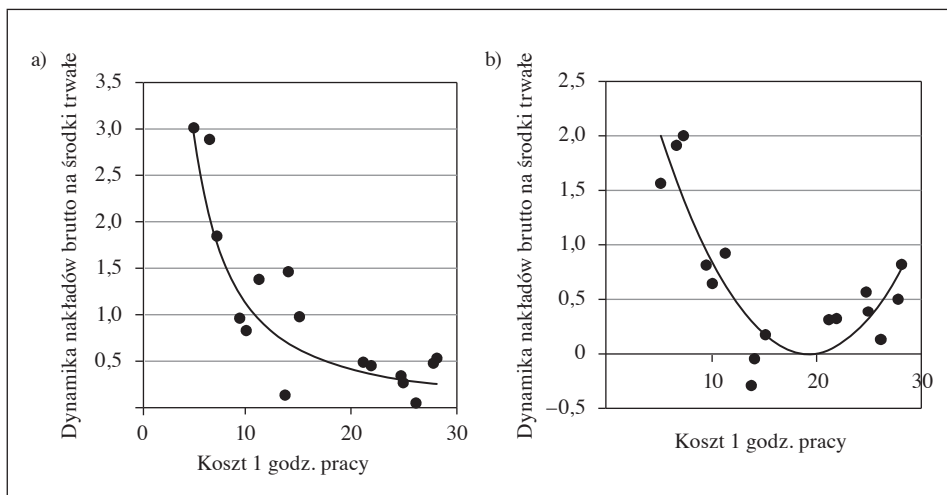
Zależność między dynamiką nakładów brutto na środki trwałe a poziomem niefinansowego majątku trwałego przypadającego na jednego zatrudnionego przedstawiono na rys. 4. Ujemna zależność między dynamiką nakładów brutto na środki trwałe a poziomem niefinansowego majątku trwałego przypadającego na jednego zatrudnionego wystąpiła dla pierwszej grupy krajów, co ponownie potwierdza teorię mówiącą o większym napływie kapitału do krajów o jego niskim relatywnym poziomie. Z kolei w grupie drugiej zależność ta była dodatnia, co również potwierdza teorię wzrostu endogenicznego. Powyższe wyniki sugerują występowanie innych determinant napływu kapitału w krajach charakteryzujących się wyższą intensywnością kapitałową w porównaniu z krajami, w których obserwujemy niższy poziom kapitału rzeczowego przypadającego na jednego zatrudnionego. Ponieważ jedną z determinant może być koszt pracy, analizie poddano zależność między tą zmienną a dynamiką nakładów brutto na środki trwałe (zob. rys. 5).

W tym przypadku badane kraje Unii Europejskiej również można podzielić na dwie grupy. Pierwszą stanowiły państwa o kosztach pracy poniżej 15 euro za godzinę, a drugą państwa o kosztach pracy powyżej 20 euro za godzinę.



Rys. 4. Zależność między dynamiką nakładów brutto na środki trwałe (2000–2014) a poziomem niefinansowego majątku trwałego przypadającego na jednego zatrudnionego (wartość majątku z 2014 r., w tys. euro) w krajach Unii Europejskiej

Źródło: obliczenia i opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.



Rys. 5. Zależność między kosztem pracy (w euro, ceny stałe z 2005 r.) a dynamiką nakładów brutto na środki trwałe: a) w latach 2000–2008 i b) w latach 2000–2014

Źródło: obliczenia i opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.

W latach 2000–2008 widoczna była ujemna zależność między rozpatrywanymi zmiennymi, która następnie na skutek kryzysu gospodarczego została nieco zniekształcona, ponieważ wyższy poziom ryzyka inwestycyjnego spowodował zmniejszenie dynamiki migracji kapitału do krajów o niższym poziomie rozwoju (por. tabela 4).

4. Wnioski

W ostatnich kilkunastu latach obserwujemy zmniejszanie się krańcowej produktywności kapitału niefinansowego w krajach Unii Europejskiej. Produktywność ta utrzymuje się jednocześnie na wyższym poziomie w nowych krajach członkowskich, które charakteryzują się również szybszym napływem kapitału rzeczowego oraz niższą wartością bazową. Uzyskane wyniki są zgodne ze sformułowanymi hipotezami badawczymi. Analiza zależności między produktywnością kapitału niefinansowego i jego dynamiką wskazuje na brak tej zależności w przypadku uwzględnienia wszystkich krajów Unii Europejskiej oraz jej występowanie w wydzielonych grupach krajów. Zjawisko to może być tłumaczone m.in. odmiennym poziomem kosztów pracy charakteryzującym poszczególne kraje. Jednocześnie warto zauważyć, że występowanie swego rodzaju klubowej produktywności kapitału wskazuje na odmienną rolę czynników decydujących o zachodzeniu konwergencji realnej. W krajach o niższym poziomie kapitału przypadającego na jednego zatrudnionego decydujące znaczenie mają akumulacja i produktywność kapitału, podczas gdy w grupie krajów o wyższym poziomie rozwoju znaczenie ma przede wszystkim stosowana technologia. Oceniając kształtowanie się produktywności w krajach UE, należy jednocześnie uwzględnić, że wpływ na przedstawione wyniki może mieć wybrany okres analizy, obejmujący spowolnienie wzrostu gospodarczego oraz zmiany przepływu kapitału wywołane ogólnosiwiatowym kryzysem.

Literatura

- Batóg J. [2010], *Konwergencja dochodowa w krajach Unii Europejskiej. Analiza ekonometryczna*, Uniwersytet Szczeciński, Rozprawy i Studia, t. 780, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin.
- Boskin M.J., Lau L.J. [2000], *Generalized Solow-Neutral Technical Progress and Postwar Economic Growth*, NBER Working Paper No. 8023, Cambridge.
- Gehring A. [2013], *Growth, Productivity and Capital Accumulation: The Effects of Financial Liberalization in the Case of European Integration*, „International Review of Economics and Finance”, vol. 25, <https://doi.org/10.1016/j.iref.2012.07.015>.

- Gourinchas P.O., Jeanne O. [2013], *Capital Flows to Developing Countries: The Allocation Puzzle*, „Review of Economic Studies”, vol. 80, nr 4, <https://doi.org/10.1093/restud/rdt004>.
- Jäger K. [2016], *EU KLEMS Growth and Productivity Accounts 2016 Release, Statistical Module*, The Conference Board, http://euklems.net/TCB/2016/Methodology_EU%20KLEMS_2016.pdf (data dostępu: 11.01.2017).
- Montes-Solla P., Faiña Medín J.A., Lopez-Rodriguez J. [2015], *Regional Development in Spain 1989–2010: Capital Widening and Productivity Stagnation*, Munich Personal RePEc Archive, Paper No. 72921.
- Nell K.S., Thirlwall A.P. [2014], *Explaining Differences in the Productivity of Capital Across Countries in the Context of ‘New’ Growth Theory*, University of Kent, School of Economics Discussion Papers, KDPE 1412.
- Nowak W. [2006], *Koncepcje konwergencji w teorii wzrostu gospodarczego*, „Nierówności Społeczne a Wzrost Gospodarczy”, nr 8.
- Technology, Productivity and Job Creation. Best Policy Practices* [1998], OECD, Paris.
- Tsionas E.G. [2000], *Productivity Convergence in Europe*, „Eastern Economic Journal”, vol. 23, nr 3.

An Econometric Analysis of Capital Productivity in the European Union

(Abstract)

The paper presents the results of an analysis of capital productivity in the member countries of the European Union in the years 2000-2014. On the basis of a one-factor production function, changes in this variable were calculated for both time series and cross-section data. This enabled the identification of regularities both in particular countries and the EU as a whole. Those regularities included the significant influence of the economic crisis which began in 2008, the attendant blow to capital productivity of capital in the Member States and the large differences in this measure in the international dimension. The paper's conclusions can be used by investors, whose decisions are based on the analysis of returns on invested capital. More generally, they may also inform about the future directions of capital flows and, as a consequence, about changes in EU employment levels.

Keywords: capital productivity, production function, European Union, econometric modelling.

Urszula Załuska

Dorota Kwiatkowska-Ciotucha

Analiza porównawcza sytuacji osób w wieku niemobilnym w krajach Unii Europejskiej

Streszczenie

W artykule przedstawiono wyniki badań, których celem była obiektywna ocena sytuacji osób w wieku niemobilnym w krajach Unii Europejskiej (UE 27) i porównanie jej z subiektywnymi odczuciami respondentów ze wskazanej grupy wiekowej. Uwagę zwrócono na sytuację Polski na tle pozostałych krajów członkowskich, a także poszukiwanie dobrych wzorców. W ramach badań porównano dwa podejścia do oceny sytuacji wyróżnionej grupy wiekowej. Pierwsze podejście oparte było na danych obiektywnych obrazujących sytuację w obszarach szczególnie ważnych dla funkcjonowania w społeczeństwie. W drugim podejściu wykorzystano subiektywne oceny satysfakcji osób w wieku 50–64 lat. W badaniu zastosowano metody taksonomiczne. Wyniki badań pozwoliły na wskazanie krajów najbardziej przyjaznych osobom w wieku niemobilnym oraz skonfrontowanie obiektywnie ocenianej i subiektywnie odczuwanej sytuacji tych osób w poszczególnych krajach.

Słowa kluczowe: wielowymiarowa analiza porównawcza, zmienna syntetyczna, miara rozwoju, osoby w wieku niemobilnym.

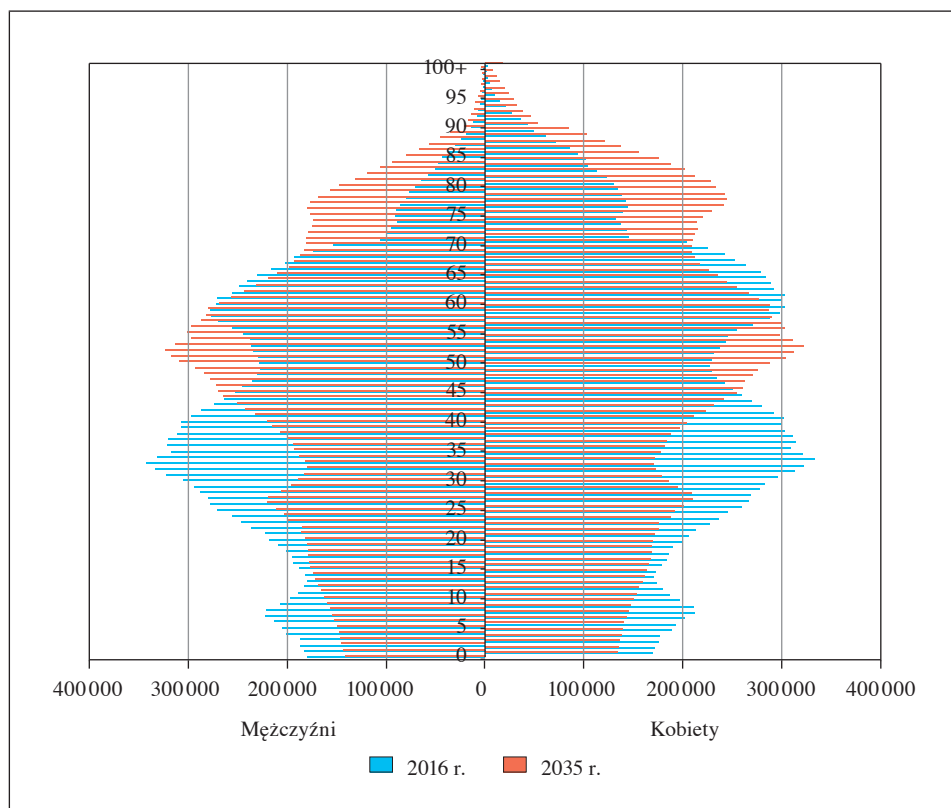
Klasyfikacja JEL: C19.

Urszula Załuska, Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów, Katedra Logistyki, ul. Komandorska 118–120, 53-345 Wrocław, e-mail: urszula.zaluska@ue.wroc.pl

Dorota Kwiatkowska-Ciotucha, Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów, Katedra Logistyki, ul. Komandorska 118–120, 53-345 Wrocław, e-mail: dorota.kwiatkowska@ue.wroc.pl

1. Wprowadzenie

Starzenie się społeczeństw jest coraz bardziej widoczne w większości krajów Unii Europejskiej. Mediana wieku w krajach Unii (UE 27) w ciągu 23 lat wzrosła z 35,2 roku w 1990 r. do 41,5 roku w 2012 r., dla Polski odpowiednio z 32,2 do 38,4 [Rozwiązania... 2013, s. 21]. Według stanu na 2012 r. średnio w UE 27 aż 44,1% populacji w wieku produkcyjnym stanowiły osoby w wieku niemobilnym (45–64 lat), w Polsce odpowiednio 42,5%. Dodatkowo coraz większy udział w ogóle ludności stanowią osoby w wieku poprodukcyjnym. Zgodnie z długookresowymi prognozami demograficznymi dla Polski następować będzie szybkie pogarszanie się sytuacji w tym zakresie (por. rys. 1).



Rys. 1. Piramida wieku – stan w 2016 r. i prognoza na 2035 r.

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Prognoza ludności... 2014].

Rosnące znaczenie dla gospodarek krajów Unii Europejskiej starszych roczników¹ stało się inspiracją do podjęcia badań dotyczących obiektywnej oceny sytuacji osób w wieku niemobilnym w krajach członkowskich i porównania jej z subiektywnymi odczuciami respondentów ze wskazanej grupy wiekowej. Ze względu na dostępne przekroje danych analizę przeprowadzono głównie w odniesieniu do osób w wieku 50–64 lat. Zwrócono uwagę na sytuację Polski na tle pozostałych krajów członkowskich, a także poszukiwanie dobrych wzorców. W artykule przedstawiono wyniki badań porównujących dwa podejścia do oceny sytuacji wskazanej grupy wiekowej. Pierwsze podejście opiera się na danych obiektywnych obrazujących sytuację w obszarach szczególnie ważnych dla funkcjonowania w społeczeństwie, a mianowicie: rynek pracy, sytuacja finansowa, zdrowie i opieka medyczna oraz edukacja i wykorzystanie nowoczesnych technologii. W drugim podejściu wykorzystano subiektywne oceny satysfakcji osób w wieku 50–64 lat. W badaniu zastosowano metody taksonomiczne. Prezentowane wyniki badań zostały uzyskane podczas realizacji projektu dotyczącego problematyki aktywizacji zawodowej i społecznej osób w wieku powyżej 50 lat².

2. Dane wykorzystane w badaniu

Analizę przeprowadzono na podstawie najnowszych danych z bazy Eurostat (stan na maj 2017 r.). Do obiektywnej oceny sytuacji osób w wieku niemobilnym w poszczególnych krajach wykorzystano 12 zmiennych charakteryzujących cztery obszary funkcjonowania człowieka: rynek pracy, sytuację finansową, zdrowie i opiekę medyczną oraz edukację i wykorzystanie nowoczesnych technologii. W badaniu starano się wykorzystać dane najbardziej adekwatne do opisu wybranej grupy wiekowej. Z uwagi na różny sposób prezentacji dostępnych danych wzięto pod uwagę dane odnoszące się do grupy osób w wieku 50–64 lat, 45–64 lat, 55–64 lat lub 50–59 lat. Badanie zostało skonstruowane w taki sposób, aby zagwarantować porównywalność danych dla wszystkich krajów Unii Europejskiej. Do opisu poszczególnych obszarów wykorzystano następujące zmienne (zmienne miały charakter stymulanty S – 7 zmiennych lub destymulanty³ D – 5 zmiennych):

¹ Problem starzenia się społeczeństw i znaczenia starszych roczników jest szeroko opisywany w literaturze, por. m.in. [Kołodziejczyk-Olczak 2014, Foster i Walker 2015].

² Projekt współpracy ponadnarodowej POWR.04.03.00-00-W042/15 pn. Inwestuj w siebie – nigdy nie jest na to za późno. Model zwiększania dostępu osób 50+ do różnych form uczenia się przez całe życie.

³ Stymulanty – zmienne, których wzrost wartości jest pożądanym, destymulanty – zmienne, których spadek wartości jest pożądanym. Więcej na temat charakteru zmiennych zob. m.in. w: [Strahl 1990, Borys 1978].

1) rynek pracy:

x_1 – wskaźnik zatrudnienia osób w wieku 50–64 lat (lfsa_ergan), dane z 2016 r. w % (S),

x_2 – stopa bezrobocia osób w wieku 50–64 lat (lfsa_urgaed), dane z 2016 r. w % (D),

x_3 – bezrobocie długotrwałe osób w wieku 50–64 lat (lfsq_upgal), dane z 2016 r. w % (D);

2) sytuacja finansowa:

x_4 – stawka godzinowa PPS⁴ osób w wieku 50–59 lat (earn_ses_hourly), dane z 2014 r. (S),

x_5 – udział osób w wieku 50–64 lat o niskich zarobkach w ogóle zatrudnionych (earn_ses_pub1a), dane z 2014 r. w % (D);

3) zdrowie i opieka medyczna:

x_6 – udział osób w wieku 45–64 lat oceniających swój stan zdrowia jako dobry lub bardzo dobry (hlth_silc_02), dane z 2015 r. w % (S),

x_7 – udział osób w wieku 45–64 lat mających długotrwałe problemy zdrowotne (hlth_silc_05), dane z 2015 r. w % (D),

x_8 – udział osób w wieku 45–64 lat niezadowolonych z opieki medycznej (hlth_silc_08), dane z 2015 r. w % (D);

4) edukacja i wykorzystanie nowoczesnych technologii:

x_9 – udział osób w wieku 45–64 lat posiadających wykształcenie wyższe (edat_lfse_03), dane z 2016 r. w % (S),

x_{10} – udział osób w wieku 55–64 lat uczestniczących w LLL w ostatnich 4 tygodniach (trng_lfse_01), dane z 2016 r. w % (S),

x_{11} – udział osób w wieku 55–64 lat korzystających z komputera w okresie ostatnich 12 miesięcy (isoc_ci_cfp_cu), dane z 2015 r. w % (S),

x_{12} – udział osób w wieku 55–64 lat korzystających z Internetu w okresie ostatnich 3 miesięcy (isoc_ci_ifp_iu), dane z 2016 r. w % (S).

Wartości zmiennych cząstkowych podano w tabeli 1. Wszystkie zmienne różnicują badaną zbiorowość (współczynniki zmienności powyżej 10%); największym zróżnicowaniem wartości charakteryzuje się zmienna x_8 – udział osób niezadowolonych z opieki medycznej (102%), najmniejszym zmienna x_1 – wskaźnik zatrudnienia (13%). Warto podkreślić, że w każdym badanym obszarze przynajmniej jedna zmienna ma bardzo silne własności różnicujące (współczynniki zmienności powyżej 50%).

⁴ Standard siły nabywczej (PPS) jest sztuczną jednostką walutową. PPS uzyskiwane jest przez podzielenie każdego agregatu gospodarczego kraju w walucie krajowej przez jego odpowiednik w parytetach siły nabywczej.

Tabela 1. Wartości zmiennych cząstkowych

Kraj	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
Austria	61,9	4,5	56,6	17,7	11,31	65,5	39,6	0,1	25,8	7,8	72	72
Belgia	56,6	5,5	72,3	20,86	1,12	71,1	29,1	3,2	31,5	3,6	77	78
Bułgaria	61,3	7,4	62,3	4,68	16,61	64,4	22,2	5,0	24,2	0,0	38	39
Cypr	59,2	11,2	67,6	15,1	13,63	74,6	43,8	1,9	30,2	3,2	43	45
Czechy	68,8	3,6	52,3	8,28	19,77	58,0	35,8	0,7	17,6	4,1	70	69
Dania	73,7	4,0	42,9	22,05	2,46	64,9	33,4	1,4	32,3	20,3	96	96
Estonia	71,6	7,4	46,4	7,04	30,2	43,9	53,5	14,7	36,9	9,5	78	76
Finlandia	68,2	7,6	43,4	16,94	3,95	68,0	51,0	3,8	40,9	16,5	92	92
Francja	60,3	7,1	63,6	17,93	7,24	63,9	42,7	1,2	25,8	13,0	74	75
Grecja	45,5	19,3	79,4	14,33	12,11	76,8	22,1	13,8	24,8	0,9	41	42
Hiszpania	56,0	17,2	63,9	14,4	11,67	70,8	35,4	0,6	28,4	3,7	59	65
Holandia	69,6	6,2	69,4	19,05	7,88	73,7	38,9	0,1	29,8	12,1	92	93
Irlandia	62,9	6,1	67,6	21,22	22,59	78,8	30,0	3,5	33,1	2,8	63	63
Litwa	70,4	8,0	49,1	6,06	26,23	31,7	36,0	3,4	30,6	3,2	54	54
Luksemburg	54,8	4,3	NA	22,57	9,23	63,1	27,0	1,4	33,0	7,3	99	95
Łotwa	66,0	9,8	38,6	5,81	28,52	35,0	45,2	10,3	27,5	4,0	66	66
Malta	51,6	3,5	NA	12,44	15,14	66,5	34,3	1,3	10,7	3,6	63	54
Niemcy	74,8	3,6	55,7	19,43	22,59	59,5	47,7	0,6	26,8	3,4	85	84
Polska	54,7	4,5	43,5	10,12	22,48	46,1	42,0	9,2	16,9	1,0	49	50

cd. tabeli 1

Kraj	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
Portugalia	60,2	10,4	73,6	11,04	11,03	35,8	47,1	4,0	15,7	4,3	48	47
Rumunia	51,3	3,7	50,1	5,39	20	64,8	21,8	9,5	11,8	0,0	39	35
Słowacja	59,5	8,7	67,9	7,61	20,53	54,7	37,2	2,7	14,8	1,0	57	62
Słowenia	52,6	6,4	67,2	11,39	16,32	56,6	38,8	0,3	22,3	4,5	49	52
Szwecja	79,6	4,9	33,0	17,58	0,7	80,2	36,0	1,0	33,7	20,9	89	96
Węgry	59,6	4,4	65,4	7,87	17,22	44,6	46,7	3,8	18,9	3,1	59	67
Wielka Brytania	70,6	3,4	39,0	16,92	18,08	66,5	38,7	2,7	37,0	9,7	88	92
Włochy	58,0	6,3	63,8	17,65	6,94	67,7	22,9	8,6	13,3	5,1	51	55
EU 27	63,5	6,5	60,2	17,05	15,32	63	37,6	3,6	24,9	6,2	68	70

Uwaga: brakujące dane dla zmiennej x_3 uzupełniono dla wartości znormalizowanych jako średnią wartości dwóch pozostałych zmiennych z obszaru „rynek pracy”.

Źródło: <http://ec.europa.eu/eurostat/data/database> (data dostępu: kwiecień 2017).

Tabela 2. Różnica między odsetkiem badanych oceniających satysfakcję jako wysoką a odsetkiem badanych oceniających satysfakcję jako niską

Kraj	y_1	y_2	y_3	y_4
Austria	-2,4	42,4	30,7	7,5
Belgia	-2,1	26,0	13,8	4,1
Bułgaria	-77,5	-26,3	-31,7	-41,6
Cypr	-51,9	20,2	3,9	-7,4
Czechy	-32,7	23,9	7,3	-6,1
Dania	29,5	55,1	40,4	29,0
Estonia	-60,0	-1,0	3,4	-17,2
Finlandia	17,2	55,3	36,4	28,5
Francja	-18,8	17,0	6,7	4,2
Grecja	-62,8	-7,9	-25,6	-25,8
Hiszpania	-38,0	8,2	-3,0	-12,9
Holandia	10,9	35,0	21,2	14,1
Irlandia	-36,6	41,1	14,9	4,3
Litwa	-40,5	10,9	13,8	-9,7
Luksemburg	-2,5	28,8	11,9	16,3
Łotwa	-60,7	-15,2	5,7	-4,3
Malta	-33,1	29,7	11,6	-5,2
Niemcy	-21,8	18,4	-3,9	-12,5
Polska	-41,2	15,7	10,8	-1,9
Portugalia	-71,8	5,7	-4,7	-14,8
Rumunia	-24,8	16,2	-2,8	-6,9
Słowacja	-42,8	27,5	2,9	-3,8
Słowenia	-49,0	17,2	6,1	-0,4
Szwecja	24,7	46,8	22,7	8,9
Węgry	-54,0	-7,7	-1,5	-22,7
Wielka Brytania	-17,9	36,1	7,6	-4,1
Włochy	-33,8	9,9	2,5	-16,7

Źródło: <http://ec.europa.eu/eurostat/data/database> (data dostępu: kwiecień 2017).

Drugie podejście do oceny sytuacji osób w wieku niemobilnym w poszczególnych krajach UE 27 opierało się na wykorzystaniu oceny indywidualnych odczuć satysfakcji przedstawicieli grupy wiekowej 50–64 lat. W badaniu zastosowano zmienną „satysfakcja” (ilc_pw05) z bazy danych Eurostat z 2013 r. (ostatnie ogólnodostępne wyniki badań – stan na maj 2017 r.). Spośród dostęp-

nych obszarów oceny satysfakcji do badania wybrano cztery wskaźniki częściowe:

- y_1 – satysfakcja z sytuacji finansowej,
- y_2 – satysfakcja z warunków mieszkaniowych,
- y_3 – satysfakcja z pracy,
- y_4 – satysfakcja z wykorzystania czasu.

Zmienna „satysfakcja” prezentowana jest w bazie danych Eurostat jako odsetek odpowiedzi na jeden z trzech wariantów oceny satysfakcji: wysoka, średnia, niska. W badaniu uwzględniono różnice między odsetkiem odpowiedzi osób oceniających satysfakcję jako wysoką a odsetkiem odpowiedzi osób oceniających satysfakcję jako niską. Przyjęto, że jest to najpełniejszy sposób subiektywnej oceny sytuacji w poszczególnych krajach. Uzyskane w wyniku takiego przekształcenia wartości ilustrują bowiem nadwyżkę osób oceniających swoją satysfakcję jako wysoką nad osobami oceniającymi satysfakcję jako niską (wynik dodatni) lub odwrotnie, informują o nadwyżce osób oceniających satysfakcję jako niską w stosunku do osób wysoko usatysfakcjonowanych (wynik ujemny). Dane wykorzystane w badaniu przedstawiono w tabeli 2.

Analiza danych zawartych w tabeli 2 dostarcza wielu ciekawych spostrzeżeń na temat subiektywnych odczuć osób w wieku 50–64 lat dotyczących ich sytuacji, wśród których warto zwrócić uwagę na co najmniej dwa. Po pierwsze, kraje Unii Europejskiej można podzielić na trzy grupy: nieliczną grupę krajów z przewagą osób usatysfakcjonowanych we wszystkich czterech analizowanych wymiarach satysfakcji (Dania, Finlandia, Holandia, Szwecja), nieliczną grupę krajów z przewagą osób nieusatysfakcjonowanych we wszystkich czterech obszarach (Bułgaria, Grecja, Węgry) oraz bardzo liczną grupę krajów, w których odnotowano przewagę usatysfakcjonowanych lub nieusatysfakcjonowanych osób w poszczególnych obszarach (pozostałe 20 krajów UE). Po drugie, można zaobserwować silną polaryzację odczuć satysfakcji w poszczególnych krajach UE – od osób silnie usatysfakcjonowanych do bardzo silnie nieusatysfakcjonowanych (np. satysfakcja z zarobków: Dania 29,5, Portugalia –71,8, satysfakcja z pracy: Dania 40,4, Bułgaria –31,7). W przypadku Polski odnotowano silne niezadowolenie z zarobków (–42,1) oraz przewagę osób usatysfakcjonowanych z warunków mieszkaniowych i z pracy (odpowiednio 15,7 i 10,8), a także bliską równowagę sytuację w przypadku satysfakcji z wykorzystania czasu (–1,2).

3. Wyniki badań

Do badania zróżnicowania sytuacji osób w wieku niemobilnym w poszczególnych krajach Unii Europejskiej wykorzystano metody taksonomiczne, które

pozwalają na porównywanie obiektów w przestrzeni wielocechowej⁵. Zastosowano dwie metody porządkowania liniowego, a mianowicie metodę zmiennej syntetycznej do oceny sytuacji na podstawie danych obiektywnych oraz metody wzorca rozwoju do oceny sytuacji na podstawie danych subiektywnych. Porządkowanie liniowe zrealizowano więc, opierając się na wartości wskaźników syntetycznych, które pozwoliły uporządkować obiekty pod względem poziomu zjawiska złożonego.

Budując zmienną syntetyczną, kierowano się następującymi postulatami⁶:

- zmienne cząstkowe wykorzystywane do budowy zmiennej syntetycznej różnicują badaną zbiorowość,
- zmienne cząstkowe nie powielają przenoszonych informacji⁷,
- procedura normalizacyjna zmiennych cząstkowych prowadzi do przekształcenia ich pierwotnych wartości na przedział [0;1],
- wszystkie zmienne cząstkowe mają takie samo znaczenie dla oceny sytuacji osób w wieku niemobilnym,
- zmienna syntetyczna ma charakter stymulanty unormowanej na przedziale [0;1].

Zmienną syntetyczną Z obliczano jako średnią ważoną wartości znormalizowanych zmiennych cząstkowych zgodnie ze wzorem:

$$Z_i = \sum_{j=1}^m z_{ij} w_j,$$

gdzie:

- Z_i – wartość zmiennej syntetycznej dla kraju i ,
- z_{ij} – wartość znormalizowanej j -tej zmiennej cząstkowej dla kraju i ,
- w_j – waga przypisana j -tej zmiennej cząstkowej, $w_j \in (0, 1)$, $\sum w_j = 1$,
- j – numer zmiennej cząstkowej.

Dla zmiennych cząstkowych mających charakter stymulant zastosowano normalizację do maksymalnych wartości zaobserwowanych w próbie:

$$z = \frac{x_{ij}}{\max_j x_{ij}}, \quad \max_j x_{ij} \neq 0.$$

⁵ Więcej na temat istoty i zastosowania wielowymiarowej analizy statystycznej m.in. w: [Hellwig 1968, 1981, Borys 1978, Grabiński, Wydymus i Zeliaś 1989, Kurkiewicz, Pocięcha i Zajac 1991, Gatnar i Walesiak 2004, Grabiński 1992, Walesiak 1996, Panek 2009].

⁶ Zob. np. [Kwiatkowska-Ciotucha 2002, Załuska 2002].

⁷ Warunek niepowielania informacji sprawdzono dla poszczególnych obszarów oceny z wykorzystaniem współczynnika korelacji liniowej Pearsona z arbitralnie przyjętą wartością progową wynoszącą 0,8.

Dla destymulant zastosowano normalizację do minimalnych wartości zaobserwowanych w próbie:

$$z = \frac{\min_j x_{ij}}{x_{ij}}.$$

Do budowy zmiennej syntetycznej zastosowano jednakowe wagi dla zmiennych cząstkowych. Zdecydowano się na najprostszy wariant ważenia zmiennych cząstkowych ze względu na brak przesłanek do stosowania innych rozwiązań. Zmienna syntetyczna ma charakter stymulanty, czyli jej wyższa wartość świadczy o lepszej sytuacji osób w wieku niemobilnym w danym kraju. Kraje porządkowano następnie według wartości zmiennej syntetycznej od najbardziej przyjaznego osobom w wieku niemobilnym (najwyższa wartość zmiennej syntetycznej) do najmniej przyjaznego (najniższa wartość zmiennej syntetycznej).

Na podstawie znormalizowanych wartości zmiennych cząstkowych zostały zbudowane cztery zmienne syntetyczne, osobno dla każdego z obszarów badawczych. W tabeli 3 podano wartości tych zmiennych i wyznaczone na ich podstawie miejsca zajmowane przez kraje w poszczególnych obszarach. Pod względem sytuacji osób w wieku niemobilnym na rynku pracy najkorzystniejsze warunki odnotowano w Wielkiej Brytanii, pod względem sytuacji finansowej – w Szwecji, zdrowia i opieki medycznej – w Holandii, a edukacji i wykorzystania nowoczesnych technologii – w Danii. Na ostatnich miejscach znajdują się odpowiednio: Grecja, Bułgaria, Łotwa i Rumunia. Warto zwrócić uwagę, że są kraje, które we wszystkich obszarach zajmują zbliżone miejsca, jak np. Szwecja (wysokie) czy Słowenia (niskie), są również takie, w których występuje duże zróżnicowanie sytuacji w poszczególnych obszarach (np. Estonia czy Wielka Brytania). Polska w analizowanych obszarach zajęła, odpowiednio, miejsca: 9, 19, 22 i 25, co oznacza, że na tle pozostałych krajów Unii Europejskiej tylko w pierwszym z obszarów (rynek pracy) sytuacja osób w wieku niemobilnym nie jest niekorzystna. Szczególnie należy zwrócić uwagę na obszary „zdrowie i opieka medyczna” oraz „edukacja i wykorzystanie nowoczesnych technologii”, w przypadku których Polska zajęła jedno z ostatnich miejsc wśród krajów unijnych.

Wartości zmiennych syntetycznych w poszczególnych obszarach posłużyły do wyznaczenia ogólnej zmiennej syntetycznej, która w sposób kompleksowy pozwoliła na ocenę sytuacji osób w wieku niemobilnym w poszczególnych krajach Unii. Ogólna zmienna syntetyczna została obliczona jako średnia arytmetyczna wartości zmiennych syntetycznych dla obszarów; przyjęto, że wszystkie obszary są tak samo ważne dla oceny sytuacji. Uzyskane wartości tej zmiennej oraz wyznaczony na tej podstawie ranking krajów przedstawiono w tabeli 4. Pierwsze miejsce w rankingu (z wartością zmiennej na poziomie 0,822) zajęła Szwecja, ostatnie (z wartością 0,372) Portugalia, Polska uplasowała się na 21 miejscu (z wartością 0,428).

Tabela 3. Wartości zmiennych syntetycznych i wyznaczone na ich podstawie miejsca krajów w poszczególnych obszarach

Kraj	Zmienna syntetyczna				Miejsce			
	rynek pracy	sytuacja finansowa	zdrowie i opieka medyczna	edukacja i nowoczesne technologie	rynek pracy	sytuacja finansowa	zdrowie i opieka medyczna	edukacja i nowoczesne technologie
Austria	0,705	0,423	0,789	0,620	10	11	2	11
Belgia	0,595	0,775	0,556	0,633	18	2	9	10
Bułgaria	0,586	0,125	0,602	0,345	20	27	6	26
Cypr	0,512	0,360	0,494	0,449	24	13	15	19
Czechy	0,813	0,201	0,492	0,513	5	20	16	15
Dania	0,848	0,631	0,511	0,933	3	3	14	1
Estonia	0,690	0,168	0,321	0,734	11	23	25	7
Finlandia	0,688	0,464	0,434	0,919	12	7	21	3
Francja	0,585	0,446	0,464	0,695	21	9	18	8
Grecja	0,388	0,346	0,650	0,375	27	15	3	24
Hiszpania	0,473	0,349	0,555	0,536	26	14	11	14
Holandia	0,633	0,466	0,826	0,801	16	6	1	5
Irlandia	0,612	0,486	0,579	0,559	17	5	7	12
Litwa	0,661	0,148	0,343	0,502	15	24	24	16
Luksemburg	0,740	0,538	0,555	0,786	8	4	10	6
Łotwa	0,677	0,141	0,309	0,554	13	25	27	13
Malta	0,810	0,299	0,514	0,408	6	16	13	21
Niemcy	0,826	0,446	0,455	0,638	4	8	19	9

cd. tabeli 3

Kraj	Zmienna syntetyczna				Miejsce			
	rynek pracy	sytuacja finansowa	zdrowie i opieka medyczna	edukacja i nowoczesne technologie	rynek pracy	sytuacja finansowa	zdrowie i opieka medyczna	edukacja i nowoczesne technologie
Polska	0,734	0,240	0,368	0,369	9	19	22	25
Portugalia	0,511	0,276	0,311	0,391	25	17	26	23
Rumunia	0,741	0,137	0,606	0,262	7	26	4	27
Słowacja	0,541	0,186	0,435	0,408	23	22	20	22
Słowenia	0,561	0,274	0,534	0,449	22	18	12	18
Szwecja	0,898	0,889	0,569	0,931	2	1	8	2
Węgry	0,675	0,195	0,350	0,476	14	21	23	17
Wielka Brytania	0,911	0,394	0,477	0,804	1	12	17	4
Włochy	0,595	0,441	0,603	0,414	19	10	5	20

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4. Ranking krajów według wartości zmiennej syntetycznej

Miejsce	Kraj	\bar{z}_i
1	Szwecja	0,822
2	Dania	0,731
3	Holandia	0,682
4	Luksemburg	0,655
5	Wielka Brytania	0,646
6	Belgia	0,640
7	Austria	0,634
8	Finlandia	0,626
9	Niemcy	0,591
10	Irlandia	0,559
11	Francja	0,547
12	Włochy	0,513
13	Malta	0,508
14	Czechy	0,505
15	Hiszpania	0,478
16	Estonia	0,478
17	Słowenia	0,454
18	Cypr	0,454
19	Grecja	0,440
20	Rumunia	0,436
21	Polska	0,428
22	Węgry	0,424
23	Łotwa	0,420
24	Bułgaria	0,415
25	Litwa	0,413
26	Słowacja	0,392
27	Portugalia	0,372

Źródło: obliczenia własne.

W metodzie wzorca rozwoju [Hellwig 1968] wykorzystano znormalizowane (standaryzacja) wartości zmiennych mających charakter stymulant. Postępowano zgodnie z następującymi etapami:

1. Wyznaczono abstrakcyjną obserwację, tzw. wzorzec rozwoju o „najlepszych” wartościach dla każdej zmiennej i tzw. antywzorzec rozwoju o „najgorszych” wartościach dla każdej zmiennej:

– wzorzec rozwoju:

$$\mathbf{z}_0 = [z_{01} \ z_{02} \ \dots \ z_{0m}],$$

$z_{0j} = \max_i z_{ij}$, gdy zmienna Z_j jest stymulantą;

– antywzorzec:

$$\mathbf{z}_{-0} = [z_{-01} \ z_{-02} \ \dots \ z_{-0m}],$$

$z_{0j} = \min_i z_{ij}$, gdy zmienna Z_j jest stymulantą.

2. Zbadano podobieństwo obserwacji do abstrakcyjnej „najlepszej” obserwacji przez obliczenie odległości każdej obserwacji od wzorca rozwoju:

$$d_{i0} = \sqrt{\sum_{j=1}^m (z_{ij} - z_{0j})^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

3. Wyznaczono dla każdej obserwacji tzw. miary rozwoju według wzoru:

$$m_i = 1 - \frac{d_{i0}}{d_0}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie:

m_i – miara rozwoju dla i -tego obiektu,

d_0 – odległość między wzorcem rozwoju a antywzorcem $d_0 = \sqrt{\sum_{j=1}^m (z_{0j} - z_{-0j})^2}$.

Miara rozwoju jest stymulantą, czyli im wyższy poziom zjawiska złożonego, tym wyższa wartość miary rozwoju.

W tabeli 5 przedstawiono uzyskaną w metodzie wzorca rozwoju macierz odległości między poszczególnymi krajami UE (oznaczenia krajów przyjęte w macierzy: AT – Austria, BE – Belgia, BG – Bułgaria, CY – Cypr, CZ – Czechy, DK – Dania, EE – Estonia, FI – Finlandia, FR – Francja, GR – Grecja, ES – Hiszpania, IE – Irlandia, LT – Litwa, LU – Luksemburg, LV – Łotwa, MT – Malta, NL – Holandia, DE – Niemcy, PL – Polska, PT – Portugalia, RO – Rumunia, SK – Słowacja, SI – Słowenia, SE – Szwecja, HU – Węgry, GB – Wielka Brytania, IT – Włochy). Największą odległość odnotowano między Danią i Bułgarią (8,44), najmniejszą, co zaskakujące, między Niemcami i Rumunią (0,40). Polacy pod względem odczuć satysfakcji najbardziej są podobni do Słoweńców (0,42), a najmniej do Bułgarów (4,44).

W tabeli 6 zamieszczono miary rozwoju dla krajów UE oraz stworzony na ich podstawie ranking. Analizując dane zawarte w tabeli, należy zauważyć przede wszystkim rzadko spotykane w badaniach społecznych bardzo duże zróżnicowanie sytuacji w poszczególnych państwach, od bliskiej wzorca sytuacji w Danii ($m = 0,999$) do odpowiadającej pozycji antywzorca sytuacji w Bułgarii ($m = 0,000$).

Tabela 5. Macierz odległości między krajami Unii Europejskiej w metodzie wzorca rozwoju

Kraj	BE	BG	CZ	DK	DE	EE	IE	GR	ES	FR	IT	CY	LV	LT	LU	HU	MT	NL	AT	PL	PT	RO	SI	SK	FI	SE	GB
BE	0,00	5,51	1,31	2,94	1,74	2,83	1,40	4,14	2,15	0,85	2,03	1,99	2,95	1,75	0,81	3,14	1,24	1,02	1,36	1,50	3,10	1,57	1,77	1,65	2,65	1,52	0,99
BG	5,51	0,00	4,45	8,44	3,89	3,07	5,52	1,50	3,39	4,82	3,57	4,00	3,48	4,20	5,96	2,59	4,80	6,52	6,62	4,44	2,91	4,00	4,28	4,38	8,11	6,92	5,07
CZ	1,31	4,45	0,00	4,06	0,95	1,71	1,19	3,09	1,12	0,88	1,01	0,72	2,15	0,84	1,82	2,09	0,40	2,24	2,22	0,61	1,87	0,80	0,75	0,50	3,70	2,66	0,80
DK	2,94	8,44	4,06	0,00	4,64	5,61	3,29	7,06	5,06	3,66	4,91	4,66	5,57	4,42	2,62	5,99	3,80	1,95	1,97	4,14	5,85	4,48	4,37	4,27	0,50	1,77	3,53
DE	1,74	3,89	0,95	4,64	0,00	1,71	2,03	2,51	0,75	1,28	0,76	1,20	2,27	1,37	2,27	1,82	1,29	2,73	2,90	1,35	1,84	0,40	1,38	1,11	4,32	3,05	1,27
EE	2,83	3,07	1,71	5,61	1,71	0,00	2,71	1,97	1,01	2,17	1,05	1,25	1,09	1,21	3,31	0,61	2,00	3,79	3,74	1,51	0,75	1,66	1,46	1,74	5,27	4,28	2,49
IE	1,40	5,52	1,19	3,29	2,03	2,71	0,00	4,13	2,26	1,43	2,19	1,54	2,99	1,74	1,54	3,19	0,86	1,82	1,57	1,34	2,75	1,86	1,40	1,16	2,87	2,21	0,99
GR	4,14	1,50	3,09	7,06	2,51	1,97	4,13	0,00	2,03	3,43	2,31	2,64	2,46	2,98	4,54	1,58	3,44	5,14	5,29	3,11	1,68	2,59	2,92	2,97	6,71	5,55	3,67
ES	2,15	3,39	1,12	5,06	0,75	1,01	2,26	2,03	0,00	1,49	0,46	0,95	1,59	1,11	2,63	1,15	1,50	3,16	3,27	1,19	1,18	0,71	1,15	1,18	4,73	3,59	1,77
FR	0,85	4,82	0,88	3,66	1,28	2,17	1,43	3,43	1,49	0,00	1,50	1,38	2,21	1,28	1,17	2,49	1,04	1,76	2,07	0,91	2,38	0,96	1,08	1,13	3,33	2,35	1,08
IT	2,03	3,57	1,01	4,91	0,76	1,05	2,19	2,31	0,46	1,50	0,00	1,00	1,74	0,88	2,62	1,20	1,35	3,04	3,06	1,15	1,41	0,84	1,25	1,24	4,60	3,42	1,64
CY	1,99	4,00	0,72	4,66	1,20	1,25	1,54	2,64	0,95	1,38	1,00	0,00	1,77	0,89	2,38	1,72	0,95	2,89	2,82	0,71	1,23	1,05	0,50	0,53	4,27	3,34	1,44
LV	2,95	3,48	2,15	5,57	2,27	1,09	2,99	2,46	1,59	2,21	1,74	1,77	0,00	1,58	3,25	1,34	2,42	3,81	3,89	1,69	1,45	2,05	1,66	2,19	5,23	4,44	2,91
LT	1,75	4,20	0,84	4,42	1,37	1,21	1,74	2,98	1,11	1,28	0,88	0,89	1,58	0,00	2,30	1,64	1,01	2,66	2,55	0,59	1,65	1,23	0,88	1,14	4,10	3,14	1,55
LU	0,81	5,96	1,82	2,62	2,27	3,31	1,54	4,54	2,63	1,17	2,62	2,38	3,25	2,30	0,00	3,65	1,74	0,82	1,49	1,89	3,48	2,02	2,04	1,98	2,28	1,53	1,48
HU	3,14	2,59	2,09	5,99	1,82	0,61	3,19	1,58	1,15	2,49	1,20	1,72	1,34	1,64	3,65	0,00	2,42	4,13	4,14	1,98	1,05	1,85	1,95	2,16	5,68	4,58	2,81
MT	1,24	4,80	0,40	3,80	1,29	2,00	0,86	3,44	1,50	1,04	1,35	0,95	2,42	1,01	1,74	2,42	0,00	2,07	1,91	0,77	2,15	1,17	0,94	0,66	3,43	2,45	0,66
NL	1,02	6,52	2,24	1,95	2,73	3,79	1,82	5,14	3,16	1,76	3,04	2,89	3,81	2,66	0,82	4,13	2,07	0,00	0,94	2,37	4,04	2,56	2,61	2,50	1,68	0,82	1,76
AT	1,36	6,62	2,22	1,97	2,90	3,74	1,57	5,29	3,27	2,07	3,06	2,82	3,89	2,55	1,49	4,14	1,91	0,94	0,00	2,34	4,01	2,77	2,61	2,48	1,68	1,09	1,77
PL	1,50	4,44	0,61	4,14	1,35	1,51	1,34	3,11	1,19	0,91	1,19	0,71	1,69	0,59	1,89	1,98	0,77	2,37	2,34	0,00	1,74	1,09	0,42	0,78	3,78	2,92	1,30
PT	3,10	2,91	1,87	5,85	1,84	0,75	2,75	1,68	1,18	2,38	1,41	1,23	1,45	1,65	3,48	1,05	2,15	4,04	4,01	1,74	0,00	1,78	1,51	1,69	5,47	4,52	2,60
RO	1,57	4,00	0,80	4,48	0,40	1,66	1,86	2,59	0,71	0,96	0,84	1,05	2,05	1,23	2,02	1,85	1,17	2,56	2,77	1,09	1,78	0,00	1,09	0,93	4,15	2,97	1,22
SI	1,77	4,28	0,75	4,37	1,38	1,46	1,40	2,92	1,15	1,08	1,25	0,50	1,66	0,88	2,04	1,95	0,94	2,61	2,61	0,42	1,51	1,09	0,00	0,62	3,98	3,16	1,44
SK	1,65	4,38	0,50	4,27	1,11	1,74	1,16	2,97	1,18	1,13	1,24	0,53	2,19	1,14	1,98	2,16	0,66	2,50	2,48	0,78	1,69	0,93	0,62	0,00	3,88	2,93	1,00
FI	2,65	8,11	3,70	0,50	4,32	5,27	2,87	6,71	4,73	3,33	4,60	4,27	5,23	4,10	2,28	5,68	3,43	1,68	1,68	3,78	5,47	4,15	3,98	3,88	0,00	1,61	3,18
SE	1,52	6,92	2,66	1,77	3,05	4,28	2,21	5,55	3,59	2,35	3,42	3,34	4,44	3,14	1,53	4,58	2,45	0,82	1,09	2,92	4,52	2,97	3,16	2,93	1,61	0,00	2,01
GB	0,99	5,07	0,80	3,53	1,27	2,49	0,99	3,67	1,77	1,08	1,64	1,44	2,91	1,55	1,48	2,81	0,66	1,76	1,77	1,30	2,60	1,22	1,44	1,00	3,18	2,01	0,00

Źródło: obliczenia własne.

Warto odnotować także dużą różnicę między najlepszymi w rankingu Danią i Finlandią (0,941) a trzecią w kolejności Szwecją (0,790). Należy podkreślić wysokie 13 miejsce Polski, która wyprzedziła w rankingu takie kraje, jak Niemcy, Włochy czy Hiszpania⁸.

Tabela 6. Ranking krajów według wartości miary rozwoju

Miejsce	Kraj	Miara rozwoju
1	Dania	0,999
2	Finlandia	0,941
3	Szwecja	0,790
4	Holandia	0,769
5	Austria	0,766
6	Luksemburg	0,689
7	Belgia	0,651
8	Irlandia	0,610
9	Wielka Brytania	0,582
10	Francja	0,566
11	Malta	0,550
12	Czechy	0,519
13	Polska	0,509
14	Słowacja	0,494
15	Słowenia	0,482
16	Litwa	0,476
17	Rumunia	0,469
18	Niemcy	0,451
19	Cypr	0,448
20	Włochy	0,418
21	Hiszpania	0,400
22	Łotwa	0,340
23	Estonia	0,336
24	Portugalia	0,307
25	Węgry	0,290
26	Grecja	0,164
27	Bułgaria	0,000

Źródło: obliczenia własne.

⁸ Jest to o tyle zaskakujące, że w badaniu odczuć satysfakcji przeprowadzonym w 2006 r. z zastosowaniem podobnych zmiennych dla całej populacji, w którym wykorzystano dane dla Polski (Pentorbus) oraz starej Unii Europejskiej (baza ECHP), Polacy oprócz Greków należeli do najbardziej niezadowolonych. Więcej na ten temat w pracy [Kwiatkowska-Ciotucha, Załuska i Dziechciarz 2007].

4. Porównanie wyników dwóch podejść do oceny sytuacji osób w wieku niemobilnym

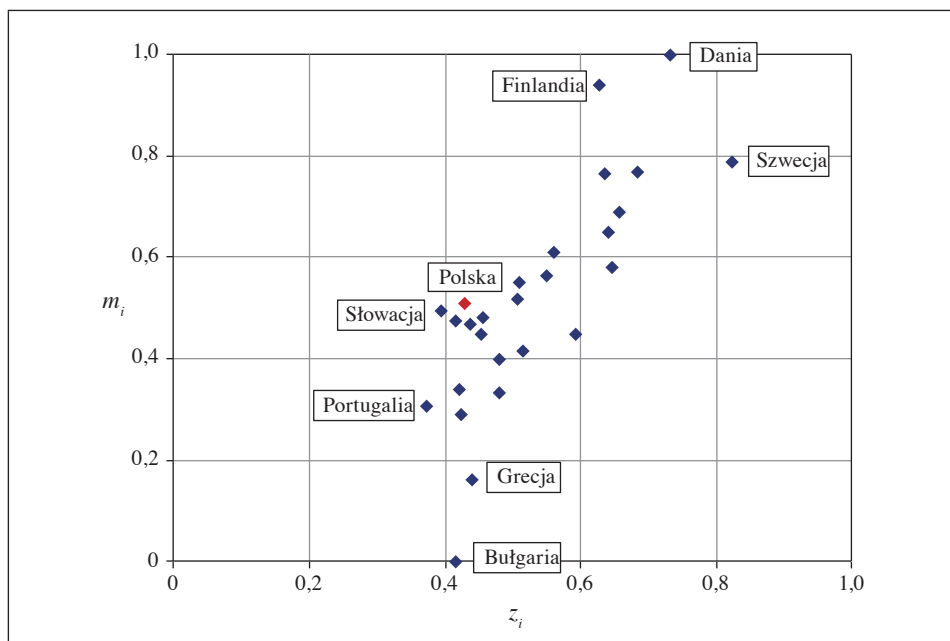
W tabeli 7 przedstawiono miejsca zajmowane przez kraje Unii Europejskiej według wartości zmiennej syntetycznej i miary rozwoju. Graficznie porównanie tych wielkości zaprezentowano na rys. 2.

Tabela 7. Miejsca krajów Unii Europejskiej według wartości zmiennej syntetycznej i miary rozwoju

Kraj	Zmienna syntetyczna	Miara rozwoju
Austria	7	5
Belgia	6	7
Bułgaria	24	27
Cypr	18	19
Czechy	14	12
Dania	2	1
Estonia	16	23
Finlandia	8	2
Francja	11	10
Grecja	19	26
Hiszpania	15	21
Holandia	3	4
Irlandia	10	8
Litwa	25	16
Luksemburg	4	6
Łotwa	23	22
Malta	13	11
Niemcy	9	18
Polska	21	13
Portugalia	27	24
Rumunia	20	17
Słowacja	26	14
Słowenia	17	15
Szwecja	1	3
Węgry	22	25
Wielka Brytania	5	9
Włochy	12	20

Źródło: obliczenia własne.

Analizując miejsca zajmowane przez poszczególne kraje w obu rankingach, można zauważyć, że dla większości krajów lokaty te są zbliżone (np. Belgia odpowiednio 6 i 7 miejsce, Dania 2 i 1, Holandia 3 i 4). Świadczy o tym również wartość współczynnika korelacji rang Spearmana, który wynosi 0,79. Wskazać można jednak kraje, dla których różnice między oboma zajmowanymi miejscami są znaczące. Oznacza to, że subiektywne oceny osób w wieku niemobilnym dotyczące zadowolenia z własnej sytuacji odbiegają od obiektywnych ocen dokonanych na podstawie wartości zmiennej syntetycznej. Wśród krajów, w których niezadowolenie jest wyższe, niż wynikałoby to z obiektywnej oceny, wymienić należy: Niemcy, Estonię, Grecję, Hiszpanię i Włochy. Natomiast do krajów, w których zadowolenie z własnej sytuacji jest wyższe niż obiektywna ocena tej sytuacji, należą: Finlandia, Litwa, Polska i Słowacja.



Rys. 2. Porównanie wartości zmiennej syntetycznej i wartości miary rozwoju dla poszczególnych krajów

Źródło: obliczenia własne.

Na podstawie analizy rozrzutu punktów na rys. 2 można zaobserwować, że generalnie wyższym wartościom zmiennej syntetycznej towarzyszą wyższe wartości miary rozwoju, co oznacza w większości przypadków zgodność ocen obiektywnych z subiektywnymi odczuciami osób w wieku niemobilnym. Najkorzystniejsza

sytuacja występuje w krajach skandynawskich, przy czym warto zwrócić uwagę, że Szwedzi są mniej usatysfakcjonowani niż Finowie czy Duńczycy, chociaż na podstawie wartości zmiennej syntetycznej można stwierdzić, że Szwecja jest krajem najbardziej przyjaznym osobom w rozpatrywanym wieku. Niekorzystna sytuacja występuje natomiast w Bułgarii i Grecji, w których niezadowolenie jest wyższe niż mogłoby to wynikać z obiektywnej oceny sytuacji. Ciekawa jest sytuacja w przypadku Portugalii, w której, przeciwnie niż w wymienionych wyżej krajach, relatywnie odczucia są lepsze niż obiektywny ogląd sytuacji. Osoby w wieku niemobilnym w Polsce charakteryzuje średnie na tle innych krajów zadowolenie z własnej sytuacji, co jednak warto podkreślić, przy relatywnie znacznie gorszej sytuacji ocenianej na podstawie zmiennej syntetycznej (czerwony punkt na wykresie).

Podsumowując wyniki badań, należy zauważyć bardzo dobrą sytuację osób w wieku niemobilnym w krajach skandynawskich. Świadczą o tym zarówno wysokie wartości zmiennej syntetycznej zbudowanej na podstawie zmiennych przyjętych jako obiektywnie obrazujące stan w obszarach ważnych dla funkcjonowania w społeczeństwie, jak i bardzo wysokie wartości miary rozwoju zbudowanej na podstawie subiektywnych odczuć respondentów z tej grupy wiekowej. Rozwiązania przyjęte w Danii, Finlandii czy Szwecji powinny być zatem traktowane jako dobre praktyki. Nie chodzi tutaj o wielkość środków przeznaczanych na wsparcie różnych grup na rynku pracy (wskazane kraje należą do najbogatszych w Unii Europejskiej), ale o całością działań zapewniających jednostkom możliwość rozwoju. Przykład Niemiec czy Włoch, a więc krajów o znacznie wyższym PKB na mieszkańca niż średnia unijna, pokazuje, że stosowane w tych krajach rozwiązania dotyczące osób w wieku niemobilnym nie są dobrze odbierane (bardzo niskie miejsce w rankingu według miary rozwoju, a powyżej średniej według zmiennej syntetycznej).

Wyniki badań można uznać za obiecujące, biorąc pod uwagę możliwości ich pogłębienia. Warto byłoby porównać zaprezentowane w artykule wyniki z analogicznymi opracowanymi dla całej populacji osób w wieku produkcyjnym. Porównanie takie pozwoliłoby na ocenę sytuacji osób w wieku niemobilnym na tle średniej sytuacji społeczno-gospodarczej w poszczególnych krajach, a tym samym ocenę jakości różnych rodzajów polityki ukierunkowanej na tę grupę wiekową.

Literatura

- Borys T. [1978], *Metody normowania cech w statystycznych badaniach porównawczych*, „Przegląd Statystyczny”, nr 2.
- Foster L., Walker A. [2015], *Active and Successful Aging: A European Policy Perspective*, „The Gerontologist”, vol. 55, nr 1, <https://doi.org/10.1093/geront/gnv002>.
- Gatnar E., Walesiak M. [2004], *Metody statystycznej analizy wielowymiarowej w badaniach marketingowych*, Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu, Wrocław.
- Grabiński T. [1992], *Metody taksonometrii*, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków.

- Grabiński T., Wydymus S., Zeliaś A. [1989], *Metody taksonomii numerycznej w modelowaniu zjawisk społeczno-gospodarczych*, PWN, Warszawa.
- Hellwig Z. [1968], *Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju oraz zasoby i strukturę wykwalifikowanych kadr*, „Przegląd Statystyczny”, nr 4.
- Hellwig Z. [1981], *Wielowymiarowa analiza porównawcza i jej zastosowanie w badaniach wielocechowych obiektów gospodarczych* [w:] *Metody i modele ekonomiczno-matematyczne w doskonaleniu zarządzania gospodarką socjalistyczną*, red. W. Welfe, PWE, Warszawa.
- Kołodziejczyk-Olczak I. [2014], *Zarządzanie pracownikami w dojrzałym wieku – wyzwania i problemy*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Kurkiewicz J., Pocięcha J., Zając K. [1991], *Metody wielowymiarowej analizy porównawczej w badaniach rozwoju demograficznego*, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Instytut Statystyki i Demografii, Monografie i Opracowania 336, Warszawa.
- Kwiatkowska-Ciotucha D. [2002], *Ranking branż produkcyjnych w Polsce w 2000 r.*, *Ekonometria* 9, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, nr 935, Wrocław.
- Kwiatkowska-Ciotucha D., Załuska U., Dziechciarz J. [2007], *Analiza porównawcza odczuć satysfakcji zawodowej – Polska na tle wybranych krajów Unii Europejskiej*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.
- Panek T. [2009], *Statystyczne metody wielowymiarowej analizy porównawczej*, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Warszawa.
- Prognoza ludności na lata 2014–2050* [2014], GUS, Warszawa.
- Rozwiązania sprzyjające aktywnemu starzeniu się w wybranych krajach Unii Europejskiej* [2013], red. E. Kryńska, P. Szukalski, Uniwersytet Łódzki, Łódź.
- Strahl D. [1990], *Metody programowania rozwoju społeczno-gospodarczego*, PWE, Warszawa.
- Załuska U. [2002], *Próba klasyfikacji polskiego sektora produkcyjnego* [w:] *Ekonometria* 9, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, nr 935, s. 209–216, Wrocław.

Comparative Analysis of the Situation of People of Non-mobile Age in EU Countries

The article presents the results of research aimed at objectively assessing the situation of people of a non-mobile age in the European Union (UE 27) and comparing it with the subjective feelings of respondents from that age group. The focus was on Poland, against the background of other Member States, as well as the search for good practices. The study compared two approaches to assessing the age group. The first was based on objective data illustrating the situation in areas of particular social importance. The second approach relied on subjective assessments of the satisfaction of 50–64 year-olds. Taxonomic methods were used. The study's results made it possible to identify those countries that may be considered the friendliest for individuals of non-mobile age and to confront the objectively assessed and subjective perceptions of these people in each country.

Keywords: multivariate comparative analysis, composite indicator, measure of development, people in the non-mobile age.

Iwona Foryś
Barbara Batóg

Porównanie kondycji rynku mieszkaniowego największych polskich miast w różnych fazach cyklu koniunkturalnego

Streszczenie

Celem artykułu jest porównanie rynków mieszkaniowych 17 największych miast w Polsce ze względu na ich zróżnicowanie w czasie. Badany poziom zróżnicowania uwzględnienia analizę odległości od punktu odniesienia, za który przyjęto rynek warszawski. Takie podejście pozwala na ocenę zmniejszania się lub zwiększania dystansu dzielącego największe miasta od stolicy, a unormowanie odległości na analizę zjawiska w czasie. W badaniu wyznaczono odległości między województwami (obiektami). Wykorzystano odległość Canberra, ponieważ uwzględnia poziom zmiennych opisujących obiekty oraz liniowe modele trendu. Wyznaczono również dynamiczne mierniki rozwoju dla miast z zastosowaniem metody TOPSIS.

Badania przeprowadzono w latach 2006–2015, analizując ceny mieszkań na rynku pierwotnym i wtórnym z uwzględnieniem form budownictwa. Przyjęty okres pozwala na analizę zjawiska w różnych fazach cyklu koniunkturalnego. Uzyskane wyniki powinny być istotną wskazówką dla kształtujących politykę mieszkaniową państwa, zwłaszcza jeśli chodzi o miasta znacznie różniące się od Warszawy, takie jak Bydgoszcz, Łódź, Katowice czy Opole.

Iwona Foryś, Uniwersytet Szczeciński, Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania, Instytut Ekonometrii i Statystyki, ul. Mickiewicza 64, 71-101 Szczecin, e-mail: iwona.forys@usz.edu.pl

Barbara Batóg, Uniwersytet Szczeciński, Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania, Instytut Ekonometrii i Statystyki, ul. Mickiewicza 64, 71-101 Szczecin, e-mail: barbara.batog@usz.edu.pl

Słowa kluczowe: rynek nieruchomości mieszkaniowych, cykl koniunkturalny, porównania regionalne, odległość Canberra.

Klasyfikacja JEL: R31, C38.

1. Wprowadzenie

Rynek nieruchomości jest rynkiem lokalnym, co oznacza, że czynniki wpływające na ten rynek mają również charakter lokalny. Z punktu widzenia inwestorów lub analityków porównujących różne rynki ważne jest jednak tempo rozwoju poszczególnych rynków rodzajowych, zwłaszcza w odniesieniu do tych najlepiej się rozwijających [Foryś 2010]. Punktem odniesienia w Polsce może być aglomeracja warszawska, przede wszystkim ze względu na charakter miasta – stolicy kraju. Takie rynki stanowią swoisty barometr, dzięki któremu można wyznaczać tendencję w przyszłych okresach [Batóg i Foryś 2013]. Są również punktem odniesienia do porównań ze stolicami innych państw [Suarez 2009].

Celem artykułu jest porównanie rynków mieszkaniowych 17 największych miast w Polsce ze względu na ich zróżnicowanie w czasie. Badanie przeprowadzono w latach 2006–2015, analizując ceny mieszkań na rynku pierwotnym i wtórnym. Przyjęty okres pozwala na analizę zjawiska w różnych fazach cyklu koniunkturalnego: hossy w latach 2006–2008, bessy w latach 2009–2012 i wychodzenia z najgłębszego kryzysu w kolejnych latach. Na rynku mieszkaniowym ważne są też przyszłe efekty budownictwa mieszkaniowego, które można opisać za pomocą liczby mieszkań, na których budowę wydano pozwolenia, liczby mieszkań, których budowę rozpoczęto, oraz liczby mieszkań oddanych do użytkowania [Foryś 2013]. Dodatkowo przeprowadzono analizę rynków lokalnych ze względu na formę budownictwa: budownictwo indywidualne, spółdzielcze, na wynajem i sprzedaż, komunalne oraz społeczne czynszowe¹.

Poziom zróżnicowania badano z uwzględnieniem analizy odległości od punktu odniesienia, za który przyjęto rynek warszawski. Takie podejście pozwoliło na ocenę zmniejszania się lub zwiększania dystansu dzielącego największe miasta od stolicy, a unormowanie odległości pozwoliło na analizę zjawiska w czasie. Uzyskane wyniki powinny być istotną wskazówką w kształtowaniu polityki mieszkaniowej państwa, zwłaszcza w procesie wspierania rozwoju obszarów o największej dysproporcji w stosunku do stolicy.

¹ Porównanie lokalnych rynków nieruchomości dla województw można znaleźć w pracy Ł. Macha [2014].

2. Metoda badawcza

W badaniach w pierwszej kolejności wyznaczono odległości między badanymi obiektami. Wykorzystano odległość Canberra (wzór (1)), ponieważ uwzględnia poziom zmiennych opisujących obiekty [Gordon 1999, Gatnar i Walesiak 2004, Młodak 2006].

$$s_{ij} = \sum_{l=1}^k \frac{|x_{il} - x_{jl}|}{x_{il} + x_{jl}}, \quad (1)$$

gdzie:

s_{ij} – odległość Canberra między obiektem i a obiektem j ,

$i, j = 1, 2, \dots, n$,

n – liczba obiektów,

x_{il} – wartość l -tej zmiennej dla obiektu i ,

x_{jl} – wartość l -tej zmiennej dla obiektu j ,

k – liczba zmiennych.

Odległość Canberra przyjmuje wartości z przedziału $\langle 0, k \rangle$, dlatego wykorzystano względną odległość Canberra (wzór (2)), która przyjmuje wartości z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$.

$$s_{ij} = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k \frac{|x_{il} - x_{jl}|}{x_{il} + x_{jl}}. \quad (2)$$

Im względna odległość Canberra jest bliżej 0, tym bardziej podobne są badane obiekty, a im bliżej 1, tym obiekty są mniej podobne².

W dalszej kolejności wykorzystano liniowe modele trendu. Estymacja i weryfikacja modeli ekonometrycznych jest opisana w wielu opracowaniach (np. [Pawłowski 1978, Johnston 1991]).

W ostatniej kolejności wyznaczono mierniki rozwoju dla miast z zastosowaniem metody TOPSIS (*technique for order preference by similarity to ideal solution*) [Hwang i Yoon 1981]. Normalizacji zmiennych dokonano za pomocą unitaryzacji zerowanej [Kukuła 2000]. Wykorzystano dynamiczną wersję miernika rozwoju, czyli wzorzec i antywzorzec został wyznaczony na podstawie wszystkich lat. W metodzie TOPSIS wartości miernika rozwoju są wyznaczone według wzoru (3).

$$q_i = \frac{d_{i,0}}{d_{i,0} + d_{i,1}}, \quad (3)$$

gdzie:

q_i – wartość miernika rozwoju dla obiektu i ,

² Odległość Canberra została wykorzystana do badania podobieństwa przez I. Foryś i B. Batóg [2016].

$d_{i,0}$ – odległość euklidesowa między obiektem i a antywzorcem,

$d_{i,1}$ – odległość euklidesowa między obiektem i a wzorcem³.

Miernik rozwoju przyjmuje wartości z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$. Im jego wartość jest bliższa 1, tym wyżej dany obiekt znajduje się w rankingu.

3. Dane wykorzystane w badaniach

Analizę dysproporcji rynków mieszkaniowych w 17 największych polskich miastach przeprowadzono, wykorzystując średnie kwartalne ceny ofertowe i transakcyjne mieszkań na rynku pierwotnym i wtórnym publikowane przez NBP, począwszy od trzeciego kwartału 2007 r. Wykorzystano również informacje z zasobu statystyki publicznej dotyczące efektów budownictwa mieszkaniowego na każdym etapie realizacji projektu, tzn. uzyskania pozwolenia na budowę, rozpoczęcia inwestycji oraz oddania do użytkowania. Z Banku Danych Lokalnych GUS pozyskano dane kwartalne za lata 2006–2016 dotyczące:

– liczby mieszkań oddanych do użytkowania według poszczególnych form budownictwa,

– liczby mieszkań, na których budowę wydano pozwolenia,

– liczby mieszkań, których budowę rozpoczęto.

W celu zachowania porównywalności danych wielkości te przeliczono na 1000 mieszkańców. W rezultacie dla wybranych miast analizowano następujące zmienne:

– jednostkowe ceny ofertowe mieszkań na rynku pierwotnym (zł/m²),

– jednostkowe ceny ofertowe mieszkań na rynku wtórnym (zł/m²),

– jednostkowe ceny transakcyjne mieszkań na rynku wtórnym (zł/m²),

– liczbę mieszkań oddanych do użytkowania na 1000 mieszkańców według poszczególnych form budownictwa,

– liczbę mieszkań na 1000 mieszkańców, na których budowę wydano pozwolenia,

– liczbę mieszkań na 1000 mieszkańców, których budowę rozpoczęto.

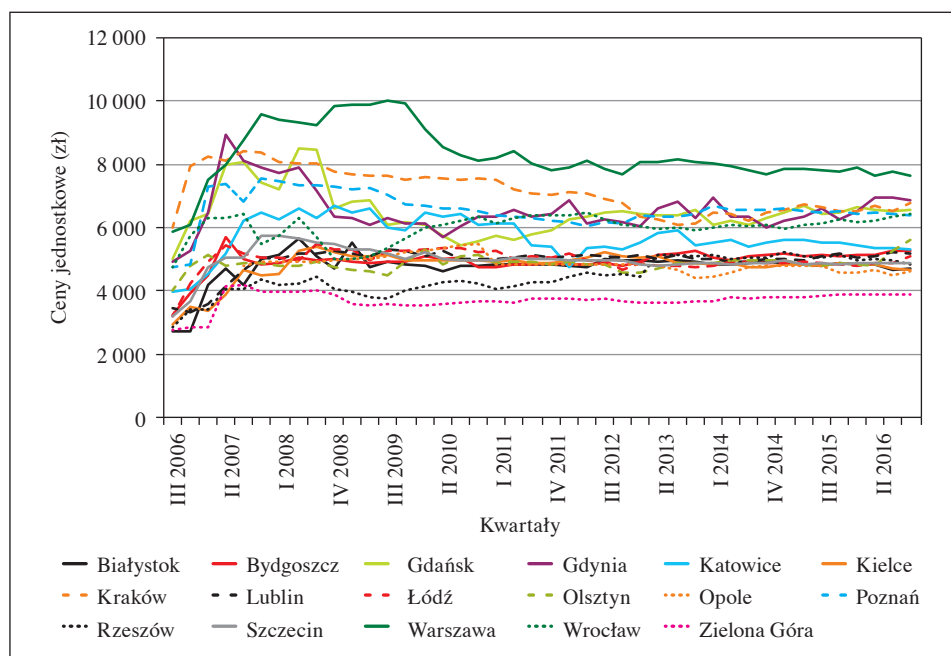
Dla badanych zmiennych analizowano dynamikę oraz odległości od wzorca, wykorzystując w tym celu wyznaczone miary odległości Canberra oraz wartości miernika rozwoju wyznaczone za pomocą metody TOPSIS.

³ W przypadku zastosowania unitaryzacji zerowanej antywzorec to wektor składający się z samych zer, a wzorec – wektor składający się z samych jedynek.

4. Ceny mieszkań na rynku pierwotnym i rynku wtórnym

Ceny mieszkań są wypadkową sytuacji na danym rynku, przy czym ich zróżnicowanie na rynku pierwotnym (ceny mieszkań nowo wybudowanych) oraz wtórnym (sprzedaż powtórna zasobu istniejących mieszkań) wzajemnie się uzupełniają [Boelhouwer i Vries 2005]. Wskazują na reakcję deweloperów na zmiany rynkowe, odzwierciedlając jednocześnie ich przyszłe oczekiwania co do kierunku zmian [Bahadır i Mykhaylova 2014]. Wraz z nowymi inwestycjami zmienia się sytuacja na rynku wtórnym [Foryś 2011]. Sprzedający mieszkania odnoszą swoje ceny ofertowe do ofert deweloperów na rynku pierwotnym, podobnie jak deweloperzy korygują swoje oferty, uwzględniając zawarte umowy na rynku wtórnym [Gibler i Zahirovich-Herbert 2014].

Analizę cen mieszkań w ostatniej dekadzie determinuje ogólnoswiatowy kryzys gospodarczy końca 2008 r., skutkujący spadkiem cen nieruchomości. W Polsce na rynku pierwotnym ceny mieszkań ustabilizowały się już w 2009 r. (rys. 1).

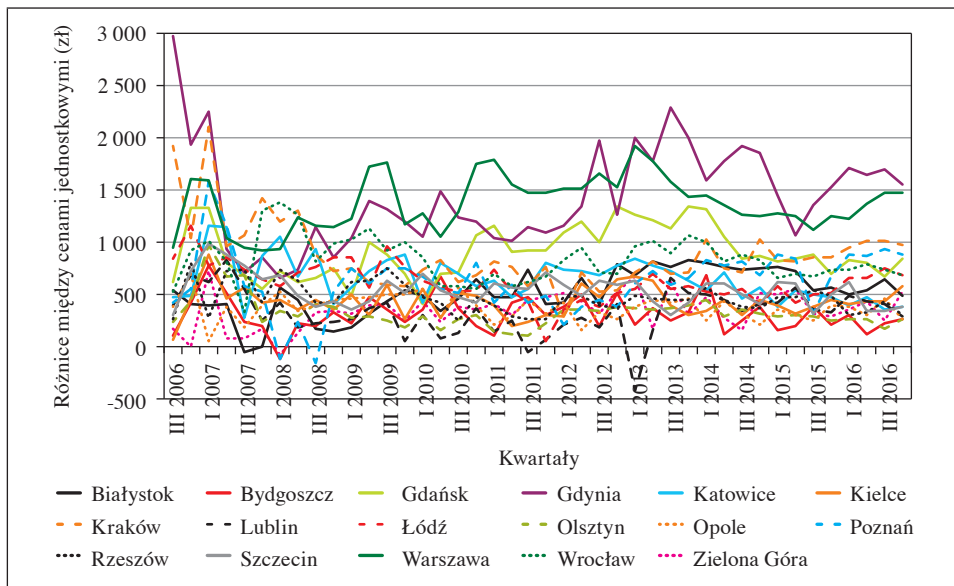


Rys. 1. Ceny jednostkowe na rynku pierwotnym w latach 2006–2016

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych NBP pochodzących z Bazy cen nieruchomości mieszkaniowych BaRN (https://www.nbp.pl/publikacje/rynek_nieruchomosci/ceny_mieszkan.xls, data dostępu: 20.04.2017).

Tendencja wzrostowa w latach 2006–2008 została zahamowana w trzecim kwartale 2008 r. i po gwałtownym spadku notowanym do połowy 2009 r. w większości miast pozostaje na podobnym poziomie do końca 2016 r. Ceny mieszkań w Warszawie w badanym okresie odbiegają znacznie od cen w innych miastach (nawet o 2 tys. zł/m² w stosunku do górnej granicy cen w innych miastach). Rynek warszawski odbiega również od ogólnej tendencji, gdyż ceny osiągnięte w 2008 r. utrzymały się do końca 2009 r., a gwałtowny spadek cen na rynku pierwotnym miał miejsce dopiero w 2010 r. Najniższe ceny na rynku pierwotnym w całym badanym okresie występowały w Zielonej Górze. W ostatnich czterech latach ceny na rynkach pierwotnych badanych miast ustabilizowały się na dwóch poziomach: 5 tys. zł/m² oraz 6,5 tys. zł/m², z wyjątkiem Warszawy, gdzie ceny oscylowały wokół 8 tys. zł/m².

Na rys. 2 przedstawiono różnice między jednostkowymi cenami ofertowymi a cenami transakcyjnymi na rynku wtórnym. Ceny ofertowe rynek koryguje, obniżając je w zależności od fazy cyklu koniunkturalnego oraz efektywności informacyjnej danego rynku. Na rynku wtórnym zachowania kupujących są podobne, jeśli chodzi o tendencje, do rynku pierwotnego, ale ceny są zdecydowanie niższe. Ceny ofertowe naśladują rynek pierwotny, jednostkowe ceny transakcyjne (rys. 2) są jednak przeciętnie o 1000 zł niższe.



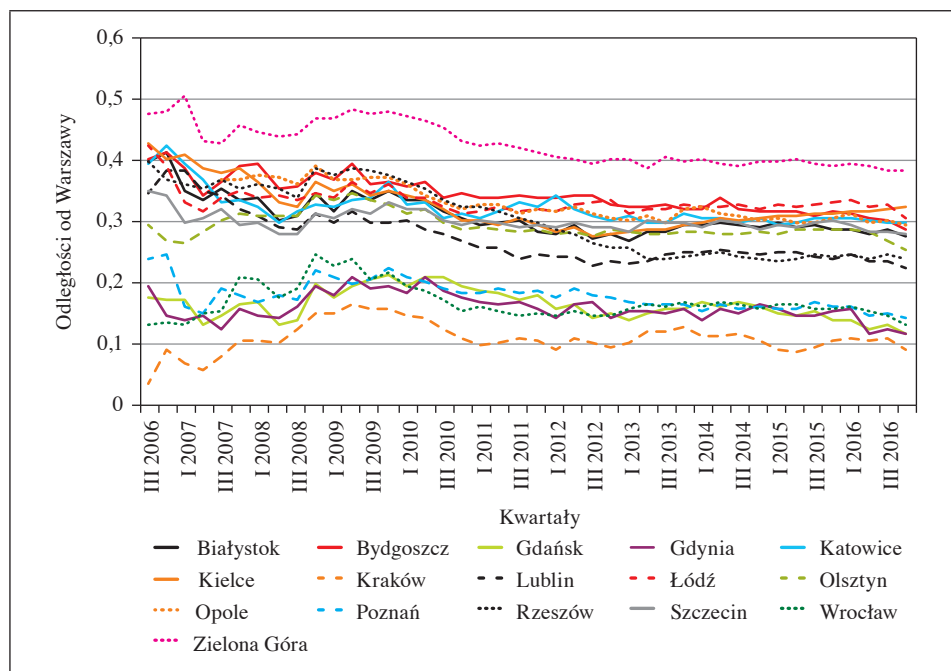
Rys. 2. Różnice między jednostkowymi cenami ofertowymi a cenami transakcyjnymi na rynku wtórnym w latach 2006–2016

Źródło: jak do rys. 1.

W tym przypadku również zdecydowanie wyróżnia się rynek warszawski. Rynek wtórny zdecydowanie szybciej odebrał negatywne sygnały z otoczenia i spadki cen miały już miejsce od początku 2008 r., natomiast stabilizację cen odnotowywano od 2010 r. Najniższe ceny występowały w ostatnich sześciu latach w Zielonej Górze (poziom 3,5 tys. zł/m² cen ofertowych oraz 3 tys. zł/m² cen transakcyjnych).

5. Badanie dysproporcji na rynku mieszkaniowym z wykorzystaniem rynku warszawskiego jako punktu odniesienia

Potwierdzeniem zauważanych dysproporcji rynku warszawskiego są uzyskane wartości odległości Canberra (rys. 3) unormowanej na przedział $(0, 1)$ obliczonej dla cen jednostkowych jako zmiennych składowych (jednostkowe ceny ofertowe mieszkań na rynku pierwotnym, zł/m²; jednostkowe ceny ofertowe mieszkań na rynku wtórnym, zł/m²; jednostkowe ceny transakcyjne mieszkań na rynku wtórnym, zł/m²). Odległość ta została zastosowana w analizach ze względu na formułę uwzględniającą poziom zmiennych składowych.



Rys. 3. Odległość Canberra badanych miast od Warszawy obliczone na podstawie trzech cen jednostkowych w latach 2006–2016

Źródło: obliczenia własne.

Najwyższe wartości uzyskano dla Zielonej Góry, najniższe dla Krakowa. Z wyjątkiem Krakowa w latach 2006–2008 oraz Rzeszowa trend wartości miary odległości Canberra dla cen jednostkowych ma podobny przebieg we wszystkich miastach. W latach 2012–2016 uzyskane wartości miary mieszczą się w przedziale 0,10–0,40, wskazując tym samym na niski poziom podobieństwa do rynku warszawskiego.

Tabela 1. Wyniki oszacowania parametrów trendów liniowych dla odległości Canberra między Warszawą a pozostałymi miastami dla cen jednostkowych (zł/m²)

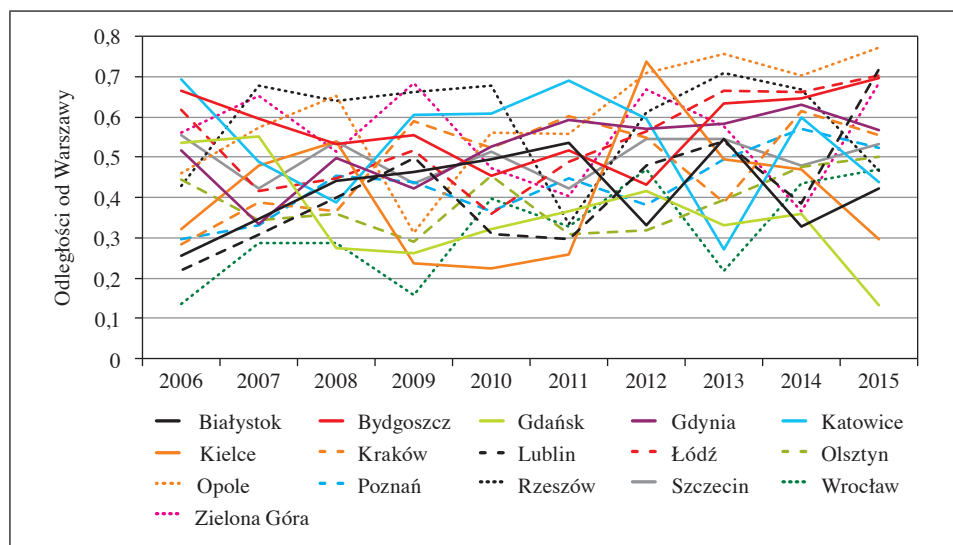
Miasto	Okres	Ocena parametru trendu liniowego	Statystyka <i>t</i>	<i>p</i>
Białystok	I kw. 2014 – IV kw. 2016	–0,0015	–4,581	0,001
Bydgoszcz	III kw. 2006 – IV kw. 2016	–0,0022	–13,873	0,000
Gdańsk	II kw. 2014 – IV kw. 2016	–0,0050	–9,064	0,000
Gdynia	IV kw. 2012 – II kw. 2016	trend stały, spadek w III i IV kw. 2016		
Katowice	III kw. 2012 – IV kw. 2016	trend stały		
Kielce	III kw. 2012 – IV kw. 2016	0,0027	18,374	0,000
Kraków	III kw. 2006 – IV kw. 2016	brak prawdziwości		
Lublin	III kw. 2006 – IV kw. 2016	–0,0030	–10,994	0,000
Łódź	I kw. 2010 – III kw. 2016	trend stały, spadek w IV kw. 2016		
Olsztyn	II kw. 2011 – II kw. 2016	trend stały, spadek w III i IV kw. 2016		
Opole	III kw. 2006 – IV kw. 2016	–0,0023	–12,026	0,000
Poznań	I kw. 2010 – IV kw. 2016	–0,0019	–12,411	0,000
Rzeszów	III kw. 2006 – IV kw. 2016	–0,0043	–15,501	0,000
Szczecin	III kw. 2010 – II kw. 2016	trend stały, spadek w III i IV kw. 2016		
Wrocław	I kw. 2013 – II kw. 2016	trend stały, spadek w III i IV kw. 2016		
Zielona Góra	III kw. 2006 – IV kw. 2016	–0,0024	–10,207	0,000

Źródło: obliczenia własne.

Podsumowaniem analizy cen mieszkań w badanych latach w stosunku do rynku warszawskiego może być oszacowanie parametrów funkcji trendu liniowego, który wskazuje tendencję odległości poszczególnych rynków w stosunku do rynku referencyjnego. W tabeli 1 zaprezentowano wyniki dla okresów (kwartałów), w których zauważono stałą tendencję miary odległości Canberra (cały badany okres lub jego część). Jeśli tendencja jest stała, wówczas odległość od Warszawy nie zmienia się, gdy mają współczynnik kierunkowy ujemny, wówczas odległość od Warszawy zmniejsza się, w przeciwnym wypadku zwiększa się. W przypadku rynku krakowskiego nie ma stałej tendencji – w krótkich okresach

odległość od Warszawy raz rośnie, raz maleje. W większości miast parametr ma znak ujemny, co świadczy o zmniejszaniu się odległości od Warszawy. Wyjątkiem są Kielce, dla których oszacowany współczynnik kierunkowy jest dodatni, więc odległość od Warszawy wzrasta.

W następnej kolejności wyznaczono odległości Canberra między Warszawą a pozostałymi badanymi miastami, wykorzystując jako zmienne składowe cztery wskaźniki mieszkań oddanych do użytkowania na 1000 mieszkańców według formy budownictwa – spółdzielcze, komunalne, przeznaczone na sprzedaż lub wynajem oraz indywidualne (rys. 4). Największe podobieństwo do rynku warszawskiego w latach 2006–2010 ze względu na wymienione wskaźniki wykazuje Zielona Góra, natomiast w latach 2012–2015 Opole. Najniższą wartość odległości od Warszawy można zauważyć na najbardziej aktywnych rynkach Wrocławia i Gdańska. Największe wahania miary można zauważyć w przypadku Kielc.

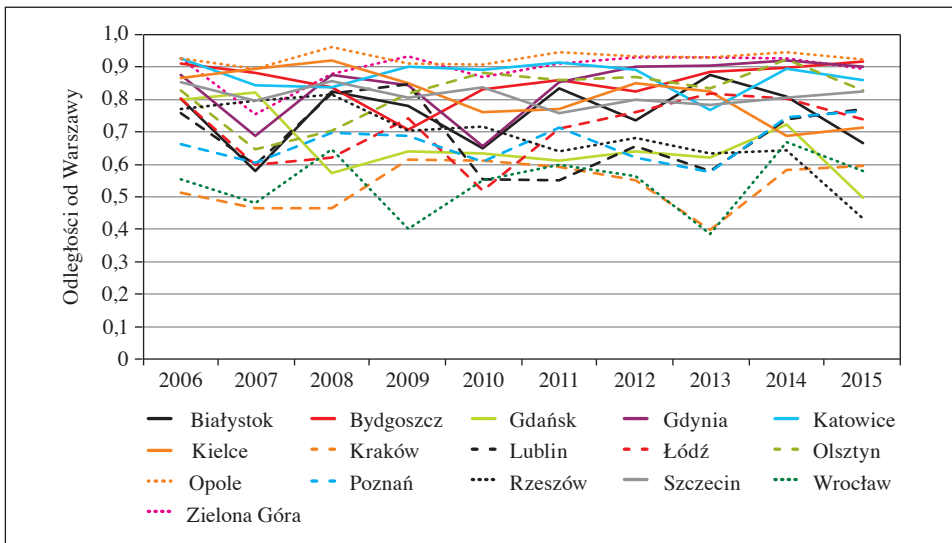


Rys. 4. Odległość Canberra badanych miast od Warszawy dla liczby mieszkań przypadających na 1000 mieszkańców według form budownictwa w latach 2006–2015

Źródło: obliczenia własne.

Przyjmując jako zmienną liczbę mieszkań oddanych do użytkowania według poszczególnych form budownictwa, ale nie odnosząc tej wielkości do liczby mieszkańców (rys. 5), najmniejszą odległość od rynku warszawskiego można zauważyć dla Wrocławia i Krakowa, gdzie dominuje budownictwo wielorodzinne, natomiast największe wartości miary odległości Canberra – dla Opola, Zielonej Góry i Katowic, w których dominuje budownictwo indywidualne.

Jeśli chodzi o przyszłe efekty budownictwa mieszkaniowego, miarą wskazującą na optymizm inwestorów jest liczba wydanych pozwoleń na budowę mieszkań. Omawiany wskaźnik w przeliczeniu na 1000 mieszkańców pozwala porównać aktywność lokalnych rynków w analizowanych miastach. W większości miast nastąpił regres w 2009 r. będący efektem rozpoczynającego się kryzysu gospodarczego. Nie wszystkie rynki zareagowały jednak w tym samym czasie, niektóre z rocznym opóźnieniem (np. Warszawa, Gdynia, Gdańsk, Poznań czy Zielona Góra). W miastach, takich jak Opole, Katowice, Szczecin czy Kraków, po regresie w 2009 r., w kolejnym roku odnotowano zwiększenie aktywności inwestorów wyrażające się zmianą tendencji w liczbie uzyskanych pozwoleń na budowę nowych mieszkań.



Rys. 5. Odległość Canberra badanych miast od Warszawy dla liczby mieszkań według form budownictwa w latach 2006–2015

Źródło: obliczenia własne.

Kolejny spadek wskaźnika widoczny jest w większości miast w 2013 r. Od 2014 r. widoczna jest zaś tendencja wzrostowa wskaźnika we wszystkich analizowanych miastach. W całym analizowanym okresie najwyższe wartości wskaźnika, sięgające 16–18 pozwoleń na 1000 mieszkańców, odnotowano w Krakowie, Warszawie, Wrocławiu i Gdańsku. Są to zdecydowanie najważniejsze rynki nowych inwestycji mieszkaniowych w Polsce. Najniższe wartości wskaźnika wystąpiły w przypadku Olsztyna i Opola. Różnica między wskaź-

nikami dla poszczególnych miast jest nawet dziewięciokrotna. Najwięcej miast odnotowało wskaźnik w przedziale 2–8 pozwoleń przypadających na 1000 mieszkańców.

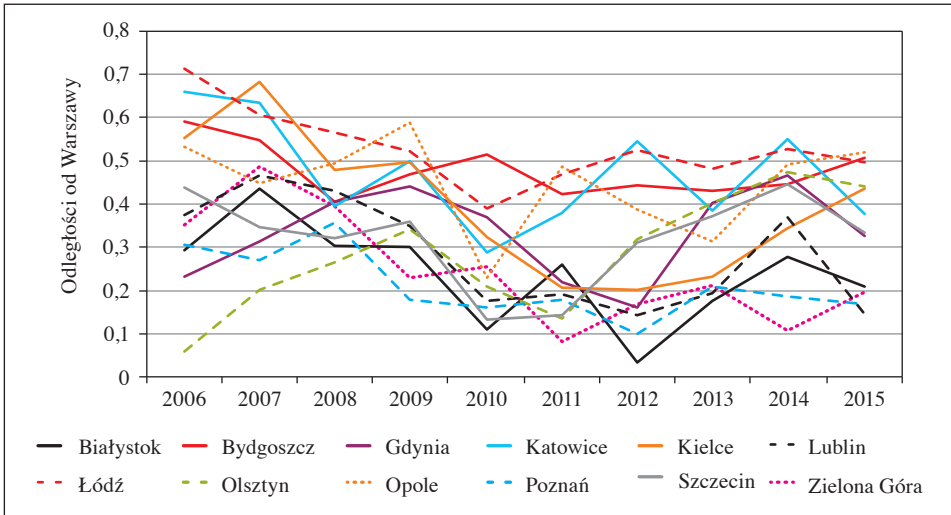
Uzyskanie pozwolenia na budowę mieszkań nie jest jednoznaczne z rozpoczęciem inwestycji. Załamanie rynku jest częstą przyczyną odłożenia decyzji o budowie, zazwyczaj do trzech lat (wynika to z ważności pozwolenia na budowę). Wskaźnik mieszkań, których budowę rozpoczęto, potwierdza przesunięcie decyzji inwestorów o budowie nawet o dwa lata w stosunku do uzyskanych pozwoleń na budowę w 2008 r. Najbardziej aktywne rynki w całym badanym okresie to Kraków oraz Gdańsk. W latach 2006–2008 oraz 2014–2015 wysoką wartość wskaźnika zanotowano również w Warszawie. Najniższą aktywność w całym badanym okresie można zauważyć w Opolu oraz Łodzi. Różnica między wskaźnikami dla miast jest nawet siedmiokrotna. Najwięcej miast ma wskaźnik z przedziału 2–6 mieszkań, których budowę rozpoczęto, na 1000 mieszkańców.

Ze względu na cykl inwestycyjny liczba mieszkań oddanych do użytkowania w stosunku do liczby mieszkań, których budowę rozpoczęto, wykazuje opóźnienie do dwóch lat. Dlatego pierwsze załamanie rynku, będące efektem kryzysu gospodarczego, jest zauważalne w latach 2009–2010. Wskaźnik ten jest również związany z liczbą rozpoczynanych nowych inwestycji. Większość inwestorów w latach 2009–2012 miała kłopoty ze sprzedażą wybudowanych mieszkań, stąd awersja do rozpoczynania nowych inwestycji. Jeśli chodzi o wartość badanego wskaźnika, w latach 2006–2009 dominują inwestycje w Krakowie i Warszawie, w latach 2010–2013 we Wrocławiu i Gdańsku, natomiast w latach 2014–2016 w Rzeszowie i Wrocławiu. W większości miast w całym badanym okresie wskaźnik mieścił się w przedziale 2–10 mieszkań oddawanych do użytkowania na 1000 mieszkańców.

Analiza miary odległości Canberra (dla zmiennych: liczba mieszkań, na których budowę wydano pozwolenia, liczba mieszkań, których budowę rozpoczęto, oraz liczba mieszkań oddanych do użytkowania) pozwala wskazać miasta znacząco różniące się od pozostałych pod względem aktywności lokalnych rynków. Można wyróżnić miasta „gorsze” od Warszawy, czyli takie, w których wartości wszystkich trzech zmiennych były niższe niż w Warszawie (rys. 6), oraz miasta „lepsze” od Warszawy, czyli takie, w których wartości zmiennych były wyższe niż w Warszawie w większości badanych lat, a zwłaszcza w ostatnich trzech latach (rys. 7). Miasta z wyższymi wartościami zmiennych to Gdańsk, Kraków, Rzeszów i Wrocław. Dla tych miast odległość od 2011 r. jest mniejsza niż 0,2.

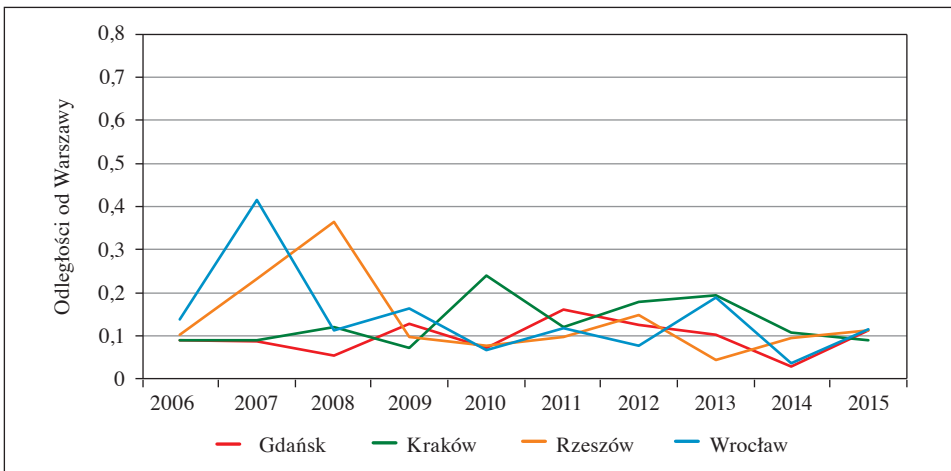
W następnym etapie wyznaczono wartości miernika rozwoju za pomocą metody TOPSIS. Zmiennymi były liczba mieszkań, na których budowę wydano pozwolenia, liczba mieszkań, których budowę rozpoczęto, oraz liczba mieszkań oddanych do użytkowania (wszystkie w przeliczeniu na 1000 mieszkańców).

Metodę TOPSIS zastosowano w taki sposób, że wzorzec i antywzorzec zostały wyznaczone dla wszystkich lat łącznie. Z tego względu możliwe jest porównywanie w czasie (rys. 8).



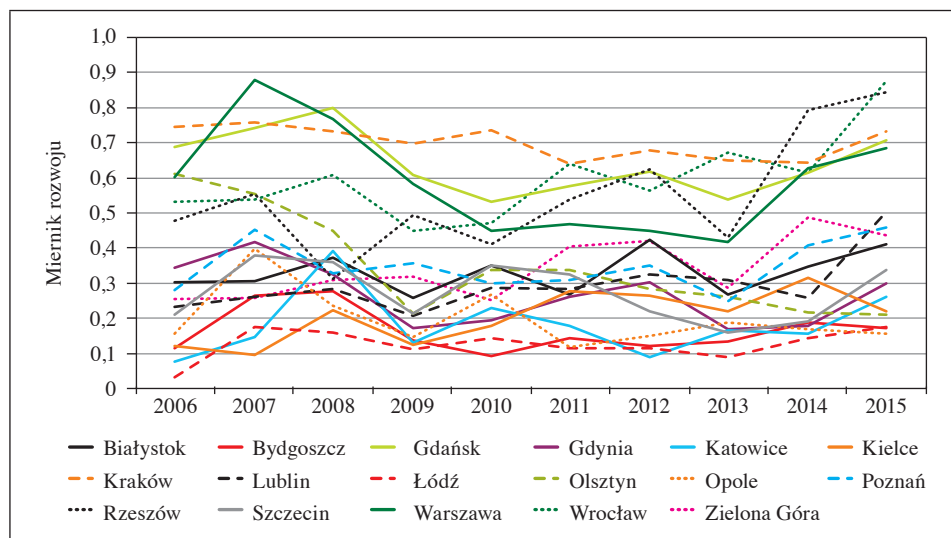
Rys. 6. Odległość Canberra badanych miast od Warszawy w latach 2006–2015 – miasta z niższymi wartościami analizowanych zmiennych

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 7. Odległość badanych miast od Warszawy w latach 2006–2015 – miasta z wyższymi wartościami analizowanych zmiennych

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 8. Wartości miernika rozwoju wyznaczonego metodą TOPSIS w latach 2006–2015
 Źródło: obliczenia własne.

Od 2011 r. miernik rozwoju dla Gdańska, Krakowa, Rzeszowa i Wrocławia przyjmuje wartości wyższe niż dla Warszawy. Najniższe wartości miernika rozwoju charakteryzowały Bydgoszcz, Łódź, Katowice i Opole.

Uzyskane wyniki wskazują na duże różnice między poziomem badanych zmiennych w największych miastach a Warszawą i grupą kilku miast „lepszyc” od Warszawy. Są to przesłanki zarówno dla decydentów kierujących wsparcie finansowe w ramach programów mieszkaniowych do miast „gorszych” od stolicy, jak również dla inwestorów typujących atrakcyjne rynki, by zaangażować kapitał w nowe projekty mieszkaniowe.

6. Wnioski

Cena jest wypadkową popytu i podaży na rynku, dlatego zauważalne tendencje w dynamice i kierunku zmian cen jednostkowych są również barometrem sytuacji na rynku mieszkaniowym. Podobną funkcję pełni wskaźnik aktywności podmiotów na rynku mierzony liczbą transakcji rynkowych. Celem artykułu było porównanie rynków mieszkaniowych 17 największych miast w Polsce w latach 2006–2015.

Uzyskane wyniki potwierdzają zmiany na lokalnych rynkach w badanych miastach po 2008 r. Począwszy od pierwszego kwartału 2009 r., spadają ceny

jednostkowe mieszkań zarówno na rynku pierwotnym, jak i na rynku wtórnym, spada popyt na mieszkania, co widać w malejącej liczbie zawieranych umów. Na podstawie badanych dysproporcji między największymi miastami w Polsce można zauważyć, że zróżnicowanie wartości badanych zmiennych jest większe w okresie hossy (lata 2006–2008) niż bessy w latach kolejnych, kiedy są one bardziej skupione. Oznacza to, że rynek mieszkaniowy w większości analizowanych miast w czasie hossy znacznie się różni od rynków najlepszych. W okresie dekonjunktury rynki zachowują się podobnie, a analizowane tendencje zmiennych są w większości przypadków zbieżne.

Zaobserwowane prawidłowości dotyczą zarówno zmian na rynku wtórnym w kontekście rynku pierwotnego (nowych efektów budownictwa mieszkaniowego), jak i analiz z uwzględnieniem form budownictwa.

Niezależnie od cyklu koniunkturalnego w skali kraju występują rynki słabsze (gorsze od przyjętego punktu odniesienia) oraz rynki lepsze. Okazało się również, że rynek warszawski nie jest w każdym badanym roku liderem mieszkaniowym w świetle badanych zmiennych, istotnych z punktu widzenia opisu zjawisk na tym rynku. Liderami są również Kraków, Wrocław czy Gdańsk. Uzyskane wyniki mogą być cenną wskazówką służącą do wyboru punktu odniesienia w innych badaniach rynków mieszkaniowych. Stanowią również materiał porównawczy dla decydentów i inwestorów na rynku mieszkaniowym.

Literatura

- Bahadır B., Mykhaylova O. [2014], *Housing Market Dynamics with Delays in the Construction Sector*, „Journal of Housing Economics”, vol. 26, <https://doi.org/10.1016/j.jhe.2014.09.005>.
- Batóg B., Foryś I. [2013], *Modele cen nieruchomości mieszkaniowych na rynku lokalnym* [w:] *Zastosowanie metod ilościowych w modelowaniu i prognozowaniu zjawisk społeczno-gospodarczych*, red. B. Pawełek, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków.
- Boelhouwer P., Vries P. [2005], *Local House Price Developments and Housing Supply*, „Property Management”, vol. 23, nr 2, <https://doi.org/10.1108/02637470510589968>.
- Foryś I. [2010], *The Cox Proportional Hazards Model in the Analysis of Property Transactions*, „Folia Oeconomica Stetinesia”, vol. 8(16), Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin, <https://doi.org/10.2478/v10031-009-0017-3>.
- Foryś I. [2011], *Społeczno-gospodarcze determinanty rozwoju rynku mieszkaniowego w Polsce. Ujęcie ilościowe*, Rozprawy i Studia, t. 793, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin.
- Foryś I. [2013], *Przestrzenne zróżnicowanie dynamiki wybranych wskaźników budownictwa mieszkaniowego w Polsce w latach 2003–2013*, Zeszyt Naukowy Uniwersytetu Szczecińskiego, nr 826, Studia i Prace WNEiZ, nr 37, t. 1, red. B. Kryk, Szczecin.

- Foryś I., Batóg B. [2016], *Porównanie struktury mieszkań w obrocie w wybranych miastach północno-zachodniej Polski*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, nr 9(957), <https://doi.org/10.15678/ZNUEK.2016.0957.0904>.
- Gatnar E., Walesiak M. [2004], *Metody statystycznej analizy wielowymiarowej w badaniach marketingowych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.
- Gibler K.M., Zahirovich-Herbert V. [2014], *The Effect of New Residential Construction on Housing Prices*, „Journal of Housing Economics”, vol. 26, <https://doi.org/10.1016/j.jhe.2014.06.003>.
- Gordon A.D. [1999], *Classification*, Chapman and Hall/CRC, USA.
- Hwang C.L., Yoon K. [1981], *Multiple Attribute Decision Making. Methods and Applications. A State-of-the-Art Survey*, Springer-Verlag, Berlin.
- Johnston J. [1991], *Econometric methods*, McGraw-Hill International Editions.
- Kukuła K. [2000], *Metoda unitaryzacji zerowanej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Mach Ł. [2014], *Próba budowy homogenicznych grup województw w obszarze lokalnych rynków nieruchomości mieszkaniowych*, „Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych”, t. XV/3.
- Młodak A. [2006], *Analiza taksonomiczna w statystyce regionalnej*, Difin, Warszawa.
- Pawłowski Z. [1978], *Ekonometria*, PWE, Warszawa.
- Suarez J.L. [2009], *European Real Estate Markets*, Palgrave Macmillan, New York.

The Distance between the Largest Polish Cities – the Housing Market in Different Phases of the Business Cycle

The paper compares the housing markets in the 17 biggest cities in Poland according to their diversity in time. The level of diversification is analyzed by examining the distance from the Warsaw housing market, which was the benchmark. This approach enabled an evaluation of the distances between Warsaw, Poland's capital city, and other cities. Standardised measures were applied to evaluate changes in time. In the research, the Canberra distance was applied because it depends on relative differences between the values of the variables analysed. The parameters of the trends of the distances were estimated. Additionally, dynamic development measures were calculated using the TOPSIS method.

The analysis concerns the prices of apartments on the primary and secondary markets in the years 2006–2016. This period includes different phases of business cycle: the boom in 2006–2008, the fall in 2009–2012 and the slow climb out the deep crisis afterwards. Other features of the housing market were also considered. The results obtained may provide clues to how governmental housing policy will shape up in order to support the less developed housing markets in Bydgoszcz, Łódź, Katowice and Opole.

Keywords: housing market, business cycle, regional comparisons, Canberra distance.

Justyna Mokrzycka

Porównanie bayesowskich modeli Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z asymetrycznością rozkładów warunkowych*

Streszczenie

Celem artykułu jest formalne porównanie mocy wyjaśniającej dwuwymiarowych bayesowskich modeli Copula-GARCH z warunkowym skośnym oraz symetrycznym rozkładem t -Studenta na przykładzie danych pochodzących z polskiego rynku finansowego. Przedmiotem porównania były 22 modele Copula-AR(1)-GARCH(1,1) różniące się kopulą oraz występowaniem skośności rozkładów brzegowych. W kontekście rozważanych modeli opracowane zostały metody Monte Carlo z funkcją ważności w celu uzyskania charakterystyki rozkładów *a posteriori* oraz wartości brzegowych gęstości macierzy obserwacji. Dla analizowanych danych empirycznych bardziej prawdopodobne *a posteriori* okazały się modele z symetrycznymi warunkowymi rozkładami t -Studenta. Dla logarytmicznych dziennych stóp zwrotu subindeksów indeksu WIG najwyższe prawdopodobieństwo *a posteriori* uzyskał model z kopulą Claytona-Gumbela. Zastosowanie skośnego rozkładu t -Studenta nie poprawiło mocy wyjaśniającej modeli Copula-GARCH.

Justyna Mokrzycka, Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Finansów i Prawa, Katedra Matematyki, ul. Rakowicka 27, 31-510 Kraków, e-mail: justyna.mokrzycka@uek.krakow.pl

* Artykuł powstał w wyniku realizacji projektu badawczego finansowanego ze środków przyznanych Wydziałowi Finansów i Prawa Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie w ramach dotacji na utrzymanie potencjału badawczego. Autorka serdecznie dziękuje Pani Profesor Annie Pajor za cenne uwagi merytoryczne.

Słowa kluczowe: kopula, model Copula-AR-GARCH, wnioskowanie bayesowskie, bayesowskie porównanie modeli, technika bayesowskiego łączenia wiedzy, metoda Monte Carlo z funkcją ważności.

Klasyfikacja JEL: C11, C51, C52, C58.

1. Wprowadzenie

Modelowanie powiązań i zależności między aktywami finansowymi, z jednoczesnym uwzględnieniem charakterystycznych cech warunkowych rozkładów brzegowych tych aktywów oraz formalnym porównaniem proponowanych struktur zależności, ma istotne znaczenie nie tylko teoretyczne, ale także praktyczne. Prognozowanie zmienności oraz dynamiki zależności pomiędzy procesami jest jednym z podstawowych zagadnień stochastycznego podejścia do wyceny instrumentów pochodnych, optymalizacji portfeli inwestycyjnych i kalkulacji wartości zagrożonej (*value at risk*). Biorąc pod uwagę zarządzania ryzykiem, uwzględnienie w modelowaniu wielowymiarowej struktury zależności jednoczesnego przyjmowania wartości ekstremalnych może być kluczowe dla podejmowania decyzji. Zastosowanie kopuli w modelowaniu wielowymiarowych rozkładów jest jednym z proponowanych podejść do tego zagadnienia. Rodzina kopul dwuwymiarowych obejmuje kopule o symetrycznych oraz asymetrycznych wartościach tzw. współczynników zależności ogonowych¹ (*tail dependence*) [Joe 1993].

Podstawowym narzędziem ekonometrii finansowej, zarówno w analizach jednowymiarowych, jak i wielowymiarowych, jest proces GARCH (*Generalised Autoregressive Conditionally Heteroscedastic*) zaproponowany przez T. Borellsleva w 1986 r. jako uogólnienie procesu ARCH (*Autoregressive Conditionally Heteroscedastic*). W wyniku poszukiwań modeli lepiej opisujących dane finansowe powstały różnego typu uogólnienia i modyfikacje podstawowego procesu GARCH; są to w przypadku jednowymiarowym m.in. EGARCH, TGARCH, GJR-GARCH, IGARCH, FIGARCH, a wielowymiarowym m.in. VEC, CCC, DCC, BEKK [Fiszeder 2009]. Model Copula-GARCH zaproponował A.J. Patton [2006b] oraz E. Jondeau i M. Rockinger [2006]. Specyfikacja tego modelu pozwala na ujęcie asymetrii w rozkładach warunkowych oraz asymetrii w strukturze zależności przez dobór odpowiedniej kopuli.

W niniejszym artykule przedmiotem rozważań były dwuwymiarowe bayesowskie modele Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowymi rozkładami brzegowymi *t*-Studenta i skośnymi *t*-Studenta. W modelu Copula-GARCH wielowymiarowy

¹ Prawdopodobieństwa warunkowego przekroczenia kwantyla rzędu α przez jedną zmienną losową, pod warunkiem że uczyni to druga zmienna losowa przy rzędzie kwantyla dążącym do 1 lub 0.

rozkład wektora losowego definiowany jest z wykorzystaniem warunkowych kopul, które w konsekwencji twierdzenia Sklara, mogą zostać uznane za funkcje określające strukturę zależności pomiędzy składowymi tego wektora. Z kolei warunkowe wartości oczekiwane i wariancje rozkładów brzegowych w modelu opisywane są, odpowiednio, strukturą autoregresyjną i GARCH(1,1). Istnieje możliwość rozszerzenia przedmiotowych badań na przypadki o wyższych wymiarach. Powodami ograniczenia się do przypadku dwuwymiarowego są względy numeryczne związane z czasem obliczeń wartości brzegowej gęstości macierzy obserwacji (w przypadku wyższych wymiarów jest to bardzo czasochłonne) oraz możliwość rozważania dużej liczby kopuli dwuwymiarowych. Warto również wspomnieć, że wielowymiarowe kopule eliptyczne albo mają zerowe współczynniki zależności ogonowych, albo zależności te są symetryczne, zależne od liczby stopni swobody. Z kolei kopule archimedesowe z uwagi na małą liczbę parametrów nie pozwalają na swobodne sterowanie strukturą zależności [Doman 2011]. Wobec tych mankamentów w wielowymiarowym modelowaniu proponuje się stosowanie kaskad kopuli dwuwymiarowych (*pair-copula*) [Czado 2010, Doman 2011].

Głównym celem badań było porównanie mocy wyjaśniającej modeli Copula-GARCH ze skośnym i symetrycznym rozkładem t -Studenta na przykładzie danych finansowych. Do estymacji i porównania modeli zastosowano podejście bayesowskie, które jest podejściem formalnym i całościowym. Weryfikację konieczności uwzględniania skośności rozkładów jednowymiarowych w przedmiotowym modelu przeprowadzono dla logarytmicznych stóp zwrotu notowań dwóch subindeksów indeksu WIG – WIG-Budownictwo oraz WIG-Informatyka. Charakterystyki próbkowe tych danych wskazują na występowanie asymetrii rozkładów brzegowych. Opracowano również metody Monte Carlo z funkcją ważności w kontekście stosowanych modeli.

Pierwszą pracą z zakresu bayesowskiego porównania modeli jest praca [Huard, Evin i Favre 2006], w której przedstawiono wyniki bayesowskiego porównania wybranych 9 kopul, proponując rozkład *a priori* bezpośrednio dla współczynnika tau Kendalla. Następnie R. Silva i H.F. Lopes [2008] zastosowali podejście bayesowskie do szacowania parametrów 6 wybranych kopul; porównanie modeli opierało się na kryteriach informacyjnych, m.in.: DIC (*deviance information criterion*), AIC i BIC. W publikacji [Rossi, Ehlers i Filho 2012] zaprezentowano wyniki porównania 5 modeli Copula-GARCH z warunkowym brzegowym symetrycznym i skośnym rozkładem t -Studenta dla danych symulowanych. Porównanie modeli opierało się na kryteriach informacyjnych, m.in.: DIC, EAIC (*expected value of the Akaike information criterion*) i EBIC (*the expected value of the Bayesian information criterion*). W pracy [Mokrzycka i Pajor 2016] przedstawiono bayesowskie

porównanie 11 modeli Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowym brzegowym rozkładem symetrycznym t -Studenta dla subindeksu indeksu WIG.

W artykule przedstawiono wyniki bayesowskiego (opartego na prawdopodobieństwach *a posteriori* modeli) porównania modeli Copula-GARCH o różnych strukturach zależności oraz dwóch typach warunkowych rozkładów brzegowych z wykorzystaniem danych rzeczywistych. Zaprezentowana w pracy estymacja bayesowskich modeli Copula-GARCH oraz ich porównanie stanowiła kontynuację badań prezentowanych w pracy [Mokrzycka i Pajor 2016]. Przedstawiono bayesowski model Copula-AR(1)-GARCH(1,1), omówiono estymację i porównanie modeli bayesowskich wraz z techniką bayesowskiego łączenia wiedzy oraz krótko zaprezentowano sposób estymacji parametrów modelu z wykorzystaniem metody Monte Carlo z funkcją ważności. Przedstawiono także wyniki empiryczne dla wskazanych powyżej stóp zwrotu z okresu od 1.08.2005 do 21.09.2015. Obliczenia wykonano z użyciem programu MATLAB2014 oraz opracowanych w tym programie autorskich procedur.

2. Bayesowski model Copula-AR(1)-GARCH(1,1)

Niech zbiór $Y \times Y_f \subset R^{(T+s)} \times n$ jest zbiorem możliwych realizacji badanego zjawiska. Wektor $(y, y_f) \in R^{(T+s)} \times n$ oznacza pojedynczą realizację tego zjawiska, przy czym $y \in R^{T \times n}$ jest wektorem zaobserwowanych wartości, natomiast $y_f \in R^{s \times n}$ wektorem wartości prognozowanych. Badane zjawisko opisane jest przez model statystyczny $(Y \times Y_f, F, P)$, gdzie F jest σ -algebrą podzbiorów zbioru $Y \times Y_f \subset R^{(T+s)} \times n$ (σ -algebrą zbiorów borelowskich); $P = \{P_\theta; \theta \in \Theta\}$ parametryczną rodziną rozkładów prawdopodobieństwa określonych na F o funkcjach gęstości $p(\cdot|\theta): Y \times Y_f \rightarrow R^+ \cup \{0\}$ określonych na zbiorze możliwych realizacji badanego zjawiska. Następnie niech $p(\theta)$ będzie funkcją gęstości rozkładu wektora parametrów, czyli tzw. rozkładem *a priori*. Bayesowski model statystyczny jest jednoznacznie określony przez gęstość łącznego rozkładu prawdopodobieństwa wektora zmiennych obserwowalnych, wektora wielkości prognozowanych oraz wektora parametrów [Osiewalski 2001]:

$$p(y, y_f, \theta) = p(y, y_f | \theta)p(\theta) = p(y_f | y, \theta)p(y | \theta)p(\theta).$$

Przejdźmy do specyfikacji procesu Copula-AR(1)-GARCH(1,1). Proces stochastyczny $\{y_t = (y_{1,t}, y_{2,t})', t = 0, 1, 2, \dots, T\}$ jest procesem Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowymi rozkładami t -Studenta, jeżeli spełnia następujące równania:

$$y_{i,t} = \phi_{i,0} + \phi_{i,1}y_{i,t-1} + z_{i,t}, \quad (1)$$

$$z_{i,t} = \varepsilon_{i,t} \sqrt{h_{i,t}}, \quad (2)$$

$$h_{i,t} = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1} z_{i,t-1}^2 + \beta_{i,1} h_{i,t-1}, \quad (3)$$

gdzie $i = 1, 2, t = 1, 2, \dots, T, a_{i,0} > 0, a_{i,1} > 0, \beta_{i,1} > 0, \{\varepsilon_{i,t}\}_{t=1}^T \sim iit(0, 1, v_i)$, czyli $\{\varepsilon_{i,t}, t = 1, 2, \dots, T\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie t -Studenta z zerową modalną, jednostkową precyzją i v_i stopniami swobody ($E(\varepsilon_{i,t}^2) = v_i/(v_i - 2), v_i > 2$). Natomiast łączny rozkład wektora $(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t})'$ zadany jest poprzez kopulę o gęstości $c(u_1, u_2)$ [Patton 2006b, Jondeau i Rockinger 2006, Doman 2011, Mokrzycka i Pajor 2016].

W modelu Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowymi skośnymi rozkładami t -Studenta $\{\varepsilon_{i,t}\}_{t=1}^T \sim iist(0, 1, v_i, \gamma_i)$, gdzie $ist(0, 1, v_i, \gamma_i)$ oznacza skośny rozkład t -Studenta z zerową modalną, jednostkową precyzją, v_i stopniami swobody oraz parametrem asymetrii γ_i .

Kopula to funkcja określona na kostce $[0, 1]^n$ o wartościach w przedziale $[0, 1]$, będąca obciążeniem dystrybuanty n -wymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa o jednostajnych rozkładach brzegowych na przedziale $[0, 1]$ do kostki jednostkowej [Jaworski 2012, Durante i Sempi 2016, Doman 2011]. Podstawą do stosowania kopul w statystyce, a także w badaniach ekonometrycznych jest twierdzenie Sklara, który wykazał, że dla każdej n -wymiarowej dystrybuanty H istnieje taka kopula C , że zachodzi następująca równość: $H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$, gdzie F_1, \dots, F_n są dystrybuantami brzegowymi. Ponadto, jeśli dystrybuanty brzegowe są ciągłe, to kopula C wyznaczona jest jednoznacznie. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Sklara również jest prawdziwe, tzn. jeżeli C jest n -wymiarową kopulą, a F_1, \dots, F_n są jednowymiarowymi dystrybuantami, to funkcja $H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ jest n -wymiarową dystrybuantą, a F_1, \dots, F_n jej dystrybuantami brzegowymi [Nelsen 1999, Jaworski 2012]. Z kolei rozszerzenie tego twierdzenia na rozkłady warunkowe, z warunkową kopulą, zostało przedstawione przez A.J. Pattona w 2006 r. Stosowanie twierdzenia z rozkładami warunkowymi jest możliwe w przypadku, gdy zbiór informacji, względem którego odbywa się warunkowanie, jest taki sam dla warunkowej kopuli oraz warunkowych rozkładów brzegowych [Patton 2006b]. Współczynnik tau Kendalla (τ) oraz współczynniki λ^U, λ^L zależności w ogonach rozkładów dwuwymiarowych dla wektora ciągłych zmiennych losowych (X_1, X_2) o kopuli C mogą zostać wyznaczone za pomocą następujących wzorów:

$$\tau(X_1, X_2) = 4 \iint_{[0,1]^2} C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1,$$

$$\lambda^U = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{2\alpha - 1 + C(1 - \alpha, 1 - \alpha)}{\alpha}, \quad \lambda^L = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{C(\alpha, \alpha)}{\alpha}.$$

W pracy wykorzystano przede wszystkim kopule, dla których współczynniki zależności ogonowych posiadają postać analityczną. Zestawienie kopul i postaci tych współczynników zawarto w tabeli 1. Dobór kopul podyktowany był przede

wszystkim uwzględnieniem tych typów, które, po pierwsze, dopuszczają asymetryczne wartości współczynników zależności w ogonach rozkładu, w tym zerową wartość jednego współczynnika, po drugie, obejmują klasycznie stosowane wielowymiarowe rozkłady t -Studenta.

Warunkowa gęstość wektora $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t})$ w modelu Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowymi rozkładami t -Studenta ma postać:

$$p_{\varepsilon}(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t} | \Psi_{t-1}) = c(t_{\nu_1}(\varepsilon_{1,t} | \Psi_{t-1}), t_{\nu_2}(\varepsilon_{2,t} | \Psi_{t-1}) | \Psi_{t-1}) f_{St}(\varepsilon_{1,t}; 0, 1, \nu_1 | \Psi_{t-1}) \times f_{St}(\varepsilon_{2,t}; 0, 1, \nu_2 | \Psi_{t-1}), \quad (4)$$

gdzie $t_{\nu}(\cdot)$ oznacza dystrybuantę jednowymiarowego rozkładu t -Studenta o zerowej modalnej, jednostkowej precyzji i ν stopniach swobody, zaś $f_{St}(\cdot; 0, 1, \nu)$ jest gęstością tego rozkładu. Natomiast w przypadku zastosowania rozkładu skośnego t -Studenta dla $\varepsilon_{1,t}$ i $\varepsilon_{2,t}$ gęstość rozkładu prawdopodobieństwa wektora ε_t ma postać:

$$p_{\varepsilon}(\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t} | \Psi_{t-1}) = c(t_{\nu_1, \gamma_1}(\varepsilon_{1,t} | \Psi_{t-1}), t_{\nu_2, \gamma_2}(\varepsilon_{2,t} | \Psi_{t-1}) | \Psi_{t-1}) f_{St, \gamma_1}(\varepsilon_{1,t}; 0, 1, \nu_1, \gamma_1 | \Psi_{t-1}) \times f_{St, \gamma_2}(\varepsilon_{2,t}; 0, 1, \nu_2, \gamma_2 | \Psi_{t-1}), \quad (5)$$

gdzie $t_{\nu, \gamma}(\cdot)$ oznacza dystrybuantę jednowymiarowego rozkładu skośnego t -Studenta o zerowej modalnej, jednostkowej precyzji, ν stopniach swobody ($\nu > 2$) i parametrze asymetrii $\gamma > 0$, zaś $f_{St, \gamma}(\cdot; 0, 1, \nu, \gamma)$ jest gęstością tego rozkładu i ma następującą postać [Osiewalski 2001, Pipień 2006]:

$$f_{St, \gamma}(x | \nu, \mu, h, \gamma) = \frac{2\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{(\gamma + \gamma^{-1}) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi\nu}} \times \sqrt{h^{-1}} \left[1 + (\nu h)^{-1} (x - \mu)^2 \left\{ \gamma^2 I_{(-\infty, 0)}(x - \mu) + \gamma^{-2} I_{[0, \infty)}(x - \mu) \right\} \right]^{-0.5(\nu+1)}.$$

Z kolei łączny warunkowy rozkład wektora $(y_{1,t}, y_{2,t})'$ przy $\mu_{i,t} = \varphi_{i,0} + \varphi_{i,1} y_{i,t-1}$, $i = 1, 2$ jest następujący:

$$p_I(y_{1,t}, y_{2,t} | \Psi_{t-1}) = p_{\varepsilon}((y_{1,t} - \mu_{1,t}) / \sqrt{h_{1,t}}, (y_{2,t} - \mu_{2,t}) / \sqrt{h_{2,t}} | \Psi_{t-1}) / \sqrt{h_{1,t} h_{2,t}}. \quad (6)$$

Wobec powyższego, oznaczając przez $\theta = (\theta_G', \theta_C')' \in \Theta = \Theta_G \times \Theta_C \subset R^m$ wektor nieznanych parametrów modelu Copula-AR(1)-GARCH(1,1), gęstość łącznego rozkładu macierzy obserwacji ma postać:

$$p(y | \theta_G, \theta_C) = \prod_{i=1}^T p_y(y_{1,t}, y_{2,t} | \Psi_{t-1}), \quad (7)$$

przy czym θ_G oznacza wektor parametrów struktury AR(1)-GARCH(1,1), θ_C wektor parametrów kopuli.

W bayesowskim modelu Copula-AR(1)-GARCH(1,1), w którym nieznanne parametry traktowane są jako zmienne losowe, gęstość łącznego rozkładu macierzy obserwacji i parametrów ma postać:

$$p(y, \theta_G, \theta_C) = p(y | \theta_G, \theta_C) p(\theta_G, \theta_C),$$

gdzie $p(\theta) = p(\theta_G, \theta_C)$ jest gęstością rozkładu *a priori* wektora θ , $p(y | \theta_G, \theta_C)$ jest tzw. gęstością próbkową macierzy obserwacji, która w przypadku analizowanego modelu w swojej postaci zawiera gęstość określonej warunkowej kopuli oraz gęstości warunkowych rozkładów brzegowych (por. równanie (7)).

W dalszej części pracy przyjęto, że gęstość rozkładu *a priori* nieznanymi parametrami modelu Copula-AR(1)-GARCH(1,1) dla struktury AR(1)-GARCH(1,1), czyli wektora:

$$\theta_G = (\varphi_{1,0}, \varphi_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}, \beta_{1,1}, \gamma_1, \nu_1, \varphi_{2,0}, \varphi_{2,1}, \alpha_{2,0}, \alpha_{2,1}, \beta_{2,1}, \gamma_2, \nu_2),$$

ma postać

$$p(\theta_G) = p(\varphi_{1,0}, \varphi_{2,0}) p(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,1}) \prod_{i=1}^2 p(\alpha_{i,0}) p(\alpha_{i,1}, \beta_{i,1}) p(\gamma_i) p(\nu_i),$$

gdzie

$$p(\varphi_{1,0}, \varphi_{2,0}) = f_{N,2}(\varphi_{1,0}, \varphi_{2,0} | (0, 0)', I); \quad p(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,1}) = \frac{1}{4} I_{(-1,1)^2}(\varphi_{1,1}, \varphi_{2,1});$$

$$p(\alpha_{i,0}) = f_{Exp}(\alpha_{i,0} | \lambda_\alpha), \lambda_\alpha = 1; \quad p(\alpha_{i,1}, \beta_{i,1}) = \frac{1}{2} I_B(\alpha_{i,1}, \beta_{i,1});$$

$$B = [0, 1]^2 \cap \{(x, y) : x + y < 1\}; \quad p(\gamma_i) = f_{LN}(\gamma_i | 0, 1),$$

przy czym f_{LN} to gęstość rozkładu log-normalnego o parametrach $\mu = 0$, $\sigma = 1$;

$$p(\nu_i) = \frac{1}{\sigma_\nu} \exp\left(-\frac{x - \mu_\nu}{\sigma_\nu}\right) I_{(\mu_\nu, \infty)}(\nu_i); \quad \mu_\nu = 2; \quad \sigma_\nu = 8; \quad E(\nu_i) = 10, i = 1, 2.$$

Gęstość rozkładu *a priori* przyjęto tak, by ograniczyć wnoszenie istotnych informacji do modelu, wzorując się na badaniach prowadzonych przez A. Pajor [2003] oraz M. Pipienia [2006]. Podobnie dobór gęstości rozkładu *a priori* dla parametrów poszczególnych kopul miał na celu przyjęcie rozkładów, które nie wnosząby istotnych informacji do modelu, stąd też przyjęto rozkłady, dla których współczynnik tau Kendalla ma dość rozproszony rozkład (zbliżony do rozkładu jednostajnego). Doboru typów rozkładów i wartości parametrów dokonano za pomocą symulacji [Mokrzycka i Pajor 2016]. Zestawienie tych rozkładów przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Zestawienie kopul stosowanych do specyfikacji modelu Copula-AR(1)-GARCH(1,1) wraz ze wskazaniem przyjętych rozkładów *a priori* oraz podstawowymi charakterystykami dotyczącymi zależnościami

Kopula	Parametr kopuli	Rozkład <i>a priori</i>	Współczynnik tau Kendall	Zależności w ogonach
Franka	$\theta \in R \setminus \{0\}$	$\theta \sim N(0, 100)$	$\tau_\theta = 1 - \frac{4}{\theta}(1 - D_1(\theta))$, gdzie $D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x e^{t-1} dt$ funkcja Debye'a	$\lambda^U = 0, \lambda^L = 0$
Claytona	$\theta > 0$	$\theta \sim \text{Exp}(1)$	$\tau_\theta = \frac{\theta}{\theta + 2}$	$\lambda^U = 0, \lambda^L = 2^{-\frac{1}{\theta}}$
Gumbela	$\theta \geq 1$	$\theta \sim \text{Exp}(1, 1) I_{(1, +\infty)}$	$\tau_\theta = 1 - \frac{1}{\theta}$	$\lambda^U = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}, \lambda^L = 0$
Claytona- -Gumbela (BB1)	$\theta > 0$ $\delta \geq 1$	$\theta \sim \text{Exp}(1),$ $\delta \sim \text{Exp}(1, 1) I_{(1, +\infty)}$	$\tau_{\theta, \delta} = 1 - \frac{2}{(2 + \theta)\delta}$	$\lambda^U = 2 - 2^{\frac{1}{\delta}}, \lambda^L = 2^{-\frac{1}{\theta}}$
Joego-Claytona (BB7)	$\kappa \geq 1$ $\gamma > 0$	$\kappa \sim \text{Exp}(1, 1) I_{(1, +\infty)}$ $\gamma \sim \text{Exp}(1)$	$\tau_{\kappa, \gamma} = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\gamma(\kappa - 2)} - \frac{4(\gamma + 1)}{\kappa\gamma(\kappa - 2)} \beta\left(\frac{2}{\kappa}, \gamma + 1\right) & \kappa \neq 2 \\ 1 + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} (\Psi(\gamma + 2) - \Psi(1)) & \kappa = 2 \end{cases}$	$\lambda^U = 2 - 2^{\frac{1}{\kappa}}, \lambda^L = 2^{-\frac{1}{\gamma}}$
Symetryzowana Joego-Claytona	$\kappa \geq 1$ $\gamma > 0$	$\kappa \sim \text{Exp}(1, 1) I_{(1, +\infty)}$ $\gamma \sim \text{Exp}(1)$	–	$\lambda^U = 2^{-\frac{1}{\gamma}}, \lambda^L = 2 - 2^{-\frac{1}{\kappa}}$

cd. tabeli 1

Kopula	Parametr kopuli	Rozkład <i>a priori</i>	Współczynnik tau Kendall	Zależności w ogonach
Obrócona Claytona	$\theta > 0$	$\theta \sim \text{Exp}(1)$	$\tau_\theta = \frac{\theta}{\theta + 2}$	$\lambda^U = 2^{-\frac{1}{\theta}}, \lambda^L = 0$
Obrócona Gumbela	$\theta \geq 1$	$\theta \sim \text{Exp}(1, 1) I_{(1, +\infty)}$	$\tau_\theta = 1 - \frac{1}{\theta}$	$\lambda^U = 0, \lambda^L = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$
Normalna	$\rho \in (-1, 1)$	$\rho \sim U(-1, 1)$	$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$	$\lambda^U = 0, \lambda^L = 0$
t-Studenta	$\rho \in (-1, 1), v > 2$	$\rho \sim U(-1, 1)$ $v \sim \text{Exp}(2, 8) I_{(2, +\infty)}$	$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$	$\lambda^U = 2t_{v+1}(-\sqrt{v+1} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}), \lambda^L = \lambda^U$

Oznaczenia: $N(0, 100)$ – rozkład normalny o średniej 0 i odchyleniu standardowym 10; $\text{Exp}(1)$ – rozkład wykładniczy z parametrem 1; $\text{Exp}(1, 1) I_{(1, \infty)}$ – rozkład wykładniczy na $(1, \infty)$ o parametrach $\mu = 1, \sigma = 1$.

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Mokrzycka i Pajor 2016].

3. Estymacja i porównanie modeli bayesowskich

Podstawą wnioskowania w modelach bayesowskich są zasady rachunku prawdopodobieństwa oraz twierdzenie Bayesa. Estymacja parametrów modelu statystycznego polega na wyznaczeniu – z gęstości $p(y, \theta_G, \theta_C) = p(y | \theta_G, \theta_C) p(\theta_G, \theta_C)$ – rozkładu warunkowego wektora zmiennych losowych $\theta = (\theta_G, \theta_C)$ przy ustalonym wektorze obserwacji y , czyli tzw. rozkładu *a posteriori*:

$$p(\theta | y) = \frac{p(y, \theta)}{p(y)} = \frac{p(y | \theta) p(\theta)}{\int_{\Theta} p(y | \theta) p(\theta) d\theta},$$

gdzie $p(y) = \int_{\Theta} p(y | \theta) p(\theta) d(\theta)$ jest brzegową gęstością wektora obserwacji. W modelu bayesowskim rozkład *a posteriori* łączy wstępną wiedzę badacza dotyczącą parametrów $\theta = (\theta_G, \theta_C)$ z informacją, jaką niosą dane empiryczne, określaną przez gęstość $p(y | \theta)$ [Pajor 2003].

Porównanie konkurencyjnych modeli bayesowskich wymaga obliczenia, na podstawie wzoru Bayesa, prawdopodobieństwa *a posteriori* tych modeli [Osiewalski 2001]. Niech $M = \{M_1, \dots, M_m\}$ będzie kompletnym zbiorem wzajemnie rozłącznych modeli bayesowskich: $M_i: p_i(y, \theta_{(i)}) = p_i(y | \theta_{(i)}) p_i(\theta_{(i)})$, $i = 1, \dots, m$, gdzie $\theta_{(i)} \in \Theta$ jest wektorem parametrów modelu M_i . Prawdopodobieństwo *a posteriori* modelu, wyznaczone na podstawie wzoru Bayesa, jest postaci:

$$p(M_i | y) = \frac{p(M_i) p(y | M_i)}{\sum_{j=1}^m p(M_j) p(y | M_j)}, \quad i = 1, \dots, m \quad (8)$$

gdzie $p(M_i)$ to prawdopodobieństwo *a priori* modelu M_i , $p(y | M_i)$ to brzegowa gęstość macierzy obserwacji w modelu M_i : $p(y | M_i) = p_i(y) = \int_{\Theta} p_i(y | \theta_{(i)}) p_i(\theta_{(i)}) d\theta_{(i)}$. Model z najwyższym prawdopodobieństwem *a posteriori* uznawany jest za model najlepiej wyjaśniający dane empiryczne. Z kolei dobór prawdopodobieństw *a priori* modeli $p(M_i)$ sprowadza się najczęściej do przyjęcia, że są one jednakowe, lub do nadania wyższych prawdopodobieństw modelom o mniejszej liczbie parametrów, zgodnie z tzw. zasadą brzytwy Ockhama [Osiewalski 2001].

Jeżeli głównym celem badawczym jest wnioskowanie o parametrach wspólnych dla wszystkich modeli (np. wnioskowanie o współczynniku tau Kendalla), możliwe jest pominięcie wyboru najbardziej prawdopodobnego modelu i zastosowanie techniki bayesowskiego łączenia wiedzy (*Bayesian pooling approach*). Metoda sprowadza się do obliczenia średniej ważonej poszczególnych gęstości *a posteriori* wspólnych parametrów z wagami równymi prawdopodobieństwom *a posteriori* modeli [Osiewalski 2001]. Gęstość *a posteriori* dla wektora wspólnych parametrów λ ma wówczas postać: $p(\lambda | y) = \sum_{i=1}^m p(M_i | y) p_i(\lambda | y)$, gdzie $p(M_i | y)$ jest prawdopodobieństwem *a posteriori* obliczonym zgodnie ze wzorem (8), $p_i(\lambda | y)$

jest gęstością brzegowego rozkładu *a posteriori* wektora λ w modelu M_i . Zastosowanie bayesowskiego łączenia wiedzy pozwala na uwzględnienie zarówno niepewności co do wartości nieznanego parametru, jak i przez uśrednienie wiedzy o wspólnych parametrach, niepewności co do prawidłowej specyfikacji modelu w skończonej klasie modeli [Osiewalski 2001].

4. Losowanie z funkcją ważności

Wyznaczenie charakterystyk rozkładu *a posteriori* w modelu bayesowskim w jawnej postaci nie zawsze jest możliwe z uwagi na skomplikowaną postać gęstości rozkładu *a posteriori* tego rozkładu. Wobec tego do wyznaczenia tych charakterystyk stosuje się numeryczne metody całkowania. Najczęściej stosowane w kontekście wnioskowania bayesowskiego są metody Monte Carlo [Osiewalski 2001, Pajor 2003, Pipień 2006]. W niniejszej pracy z uwagi na niedużą liczbę parametrów zastosowano metodę Monte Carlo z funkcją ważności (*Monte Carlo Importance Sampling*). Metoda ta była jedną z pierwszych metod stosowanych w ekonometrii bayesowskiej [Kloek i van Dijk 1978].

Ponieważ $p(\theta | y) = \frac{p(y | \theta)p(\theta)}{\int_{\Theta} p(y | \theta)p(\theta)d\theta}$, więc gęstość rozkładu *a posteriori* wektora

parametrów modelu, θ , jest proporcjonalna do iloczynu $f(\theta) = p(y | \theta)p(\theta)$. Wyznaczenie charakterystyk rozkładu *a posteriori* wektora parametrów θ sprowadza się do obliczenia wartości oczekiwanych, względem rozkładu *a posteriori*, pewnych funkcji wektora θ [Osiewalski 2001, Pipień 2006]. Niech g oznacza tę funkcję, a s będzie gęstością pewnego rozkładu, wówczas:

$$\begin{aligned} I = E(g(\theta) | y) &= \int_{\Theta} g(\theta)p(\theta | y)d\theta = \frac{\int_{\Theta} g(\theta)f(\theta)d\theta}{\int_{\Theta} f(\theta)d\theta} = \\ &= \frac{\int_{\Theta} g(\theta)\frac{f(\theta)}{s(\theta)}dS(\theta)}{\int_{\Theta} \frac{f(\theta)}{s(\theta)}dS(\theta)}, \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie $dS(\theta)$ oznacza całkowanie względem absolutnie ciągłej miary probabilistycznej S określonej na σ -algebrze zbioru Θ , o dodatniej funkcji gęstości s [Pipień 2006]. Wobec powyższego obliczenie szukanej wartości oczekiwanej I sprowadza się do obliczenia ilorazu dwóch wartości oczekiwanych względem znanej miary S , które to z kolei możemy estymować za pomocą średnich z próby. Estymator Monte Carlo wielkości I ma postać [Osiewalski 2001, Pipień 2006]:

$$\widehat{I}_n = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{g(\theta^{(i)})f(\theta^{(i)})}{s(\theta^{(i)})}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(\theta^{(i)})}{s(\theta^{(i)})}} = \frac{\sum_{i=1}^n g(\theta^{(i)})w(\theta^{(i)})}{\sum_{i=1}^n w(\theta^{(i)})}, \quad (10)$$

gdzie $w(\theta) = \frac{f(\theta)}{s(\theta)}$ oznacza tzw. funkcję wagową.

Jeżeli funkcja f jest proporcjonalna do gęstości właściwego rozkładu prawdopodobieństwa oraz $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)} \in \Theta$ są losowane niezależnie z rozkładu o gęstości s oraz wartość oczekiwana $E(g | y)$ istnieje i jest skończona, to zachodzi zbieżność prawie wszędzie: $\widehat{I}_n \rightarrow E(g | y)$, $n \rightarrow \infty$ (estymator jest zgodny). Ponadto przy spełnieniu pewnych warunków podanych m.in. w pracy [Geweke 1989] estymator ten jest asymptotycznie normalny.

Stosowanie metod Monte Carlo związane jest z obecnością błędów numerycznych. Standardowy błąd numeryczny metody Monte Carlo (NSE, *numerical standard error*) postaci $\widehat{\phi}_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (g(\theta^{(i)}) - \widehat{I}_n)^2 w(\theta^{(i)})^2}{(\sum_{i=1}^n w(\theta^{(i)}))^2}}$ powinien osiągać wartości

zerowe. Estymator współczynnika RNE (*relative numerical efficiency*, względnej

efektywności numerycznej) postaci $\widehat{RNE} = \frac{1}{n\widehat{\phi}_n^2} \left[\frac{\sum_{i=1}^n g^2(\theta^{(i)})w(\theta^{(i)})}{\sum_{i=1}^n w(\theta^{(i)})} - \widehat{I}_n^2 \right]$ powi-

nien przyjmować wartości bliskie jeden, co zachodzi wówczas, gdy losowanie według funkcji ważności prawie nie różni się od losowania z rozkładu *a posteriori* [Osiewalski 2001]. Z kolei współczynnik zmienności funkcji wagowej

$\gamma_n = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{w^2(\theta^{(i)})}{n} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{w(\theta^{(i)})}{n}\right)^2}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w(\theta^{(i)})}$ określa stosunek empirycznego odchy-

lenia standardowego wartości wag do średniej wagi. Nieograniczony wzrost tego współczynnika wraz ze wzrostem liczby losowań, obserwowany w postaci nagłych skoków jego wartości, wskazuje, że dobrana funkcja ważności jest nieodpowiednia [Osiewalski 2001].

W zastosowaniach metody Monte Carlo dobór funkcji ważności jest bardzo ważny – im funkcja ważności lepiej przybliży jądro gęstości rozkładu *a posteriori*, tym uzyskiwane realizacje „nieznacznie” różnią się od realizacji z rzeczywistego rozkładu *a posteriori*, co skutkuje dobrymi aproksymacjami numerycznymi. W niniejszej pracy za funkcję ważności przyjęto wielowymiarowy rozkład *t*-Studenta z 3 stopniami swobody zgodnie z pracami J. Osiewalskiego [2001] i M. Pipienia [2006]. Parametry tego rozkładu (wektor średnich i macierz kowa-

riancji) zostały oszacowane iteracyjnie na podstawie wstępnych 100 tys. lub 1 mln przebiegów algorytmu.

Stosowanie metody Monte Carlo z funkcją ważności znacznie upraszcza sposób szacowania wartości brzegowej gęstości macierzy obserwacji $p(y)$, gdyż jej estymatorem jest średnia arytmetyczna wag: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w(\theta^{(i)})$. Warto zaznaczyć, że stosowanie algorytmu Metropolisa-Hastingsa wymaga zastosowania bardziej czasochłonnych (obliczeniowo) estymatorów, np. skorygowanej średniej harmonicznej, estymatora Chiba i Jeliaskova, estymatora Laplace'a i Metropolisa czy skorygowanej średniej arytmetycznej [Mokrzycka i Pajor 2016, Pajor 2017].

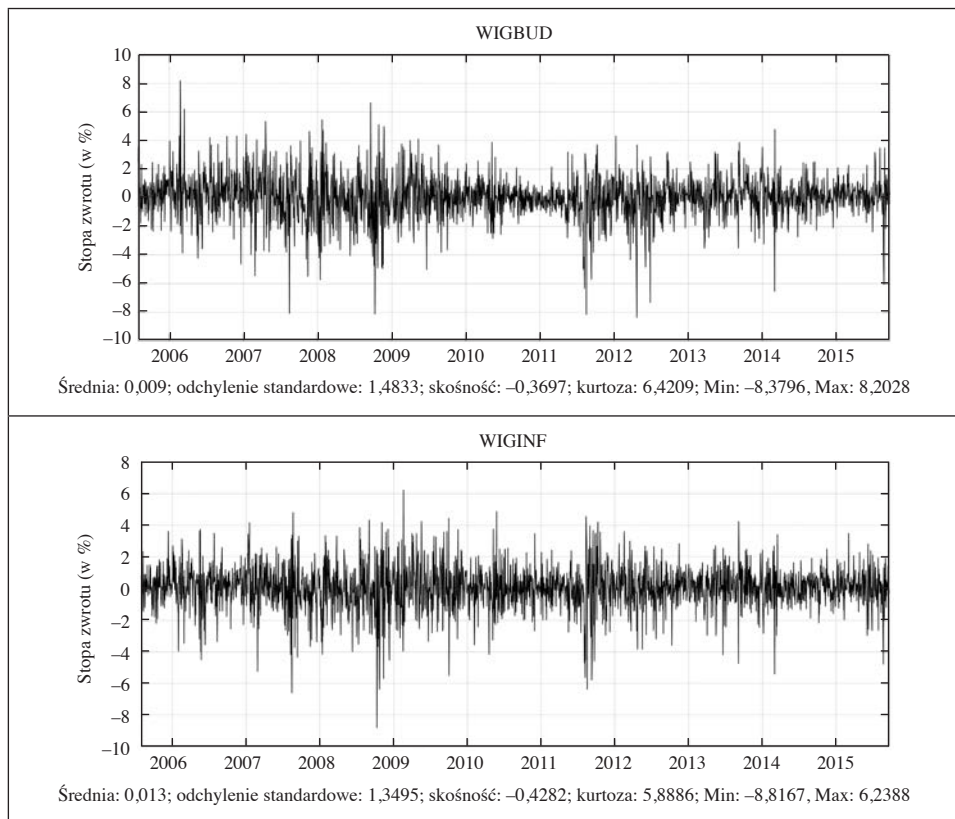
5. Wyniki empiryczne

Przedmiotem modelowania jest zmienność i struktura zależności dziennych, procentowych logarytmicznych stóp zwrotu, obliczonych na podstawie ceny zamknięcia subindeksów indeksu WIG – WIG-Budownictwo (WIGBUD) i WIG-Informatyka (WIGINF) w okresie od 1.08.2005 do 21.09.2015. Wybór tego okresu wynika z kontynuacji badań nad strukturą zależności dla subindeksów indeksu WIG zaprezentowanych w pracy [Mokrzycka i Pajor 2016]. Liczba obserwacji (stóp zwrotu) szeregu subindeksów wyniosła 2539. Dane pochodziły z portalu www.stooq.pl. Na rys. 1 przedstawiono wykresy oraz charakterystyki próbkowe logarytmicznych procentowych stóp zwrotu.

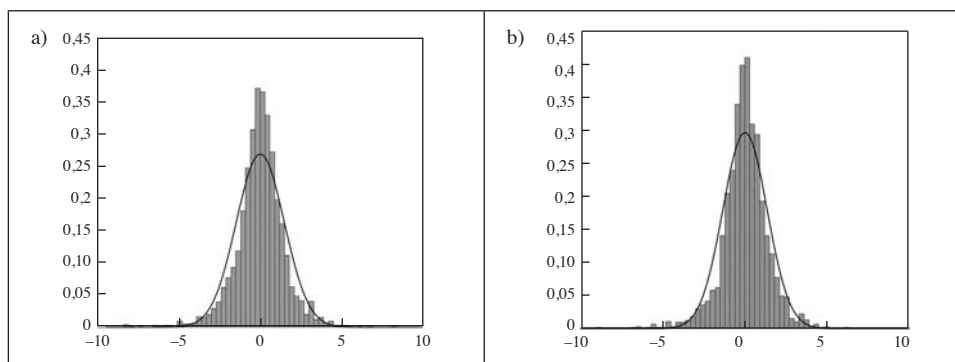
Wykresy analizowanych szeregów czasowych obrazują występowanie okresów skupiania się zmienności (*volatility clustering*), czyli okresów o dużych co do wartości bezwzględnej stopach zwrotu, po których następują okresy o mniejszych wartościach stóp zwrotu. Współczynniki skośności wskazują na występowanie lewostronnej asymetrii rozkładu. Wartość kurtozy: 5,8886 i 6,4209 wskazuje na leptokurtyczność rozkładów empirycznych (duża koncentracja rozkładu wokół modalnej oraz występowanie grubych ogonów). Histogramy rozkładów empirycznych wraz z wykresami gęstości rozkładu normalnego o średnich i wariancjach z próby (rys. 2), obrazują występowanie obserwacji nietypowych (przekraczających trzykrotność odchylenia standardowego od średniej). Prezentowane wykresy sugerują dobór rozkładów o grubych ogonach.

Wartość współczynnika korelacji liniowej wynosi 0,5480, a współczynnika tau Kendalla – 0,3384. Wartości te sugerują dodatnią zależność.

Wyniki zamieszczone w tabelach 2–4 przedstawiają wartości logarytmu naturalnego brzegowej gęstości *a posteriori* macierzy obserwacji ($\ln(p(y|M))$) oraz wartości prawdopodobieństwa *a posteriori* poszczególnych modeli, przy założeniu, że *a priori* modele są jednakowo prawdopodobne.



Rys. 1. Wykresy oraz charakterystyki próbkowe logarytmicznych procentowych stóp zwrotu
 Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Rozkłady empiryczne analizowanych szeregów z dopasowaną gęstością rozkładu normalnego: a) WIGBUD, b) WIGINF

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Prawdopodobieństwa *a posteriori* modeli Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowymi brzegowymi rozkładami *t*-Studenta

Lp.	Kopula	$\ln(p(y M))$	$p(M)$	$p(M y)$
1	Franka	-8145,407	0,0909	0
2	Claytona	-8128,834	0,0909	0
3	Gumbela	-8149,97	0,0909	0
4	Claytona-Gumbela (BB1)	-8083,948	0,0909	0,71061
5	Joe-Claytona (BB7)	-8086,289	0,0909	0,06838
6	Symetryzowana Joe-Claytona	-8085,13	0,0909	0,2178
7	Obrócona Claytona	-8128,838	0,0909	0
8	Obrócona Gumbela	-8092,694	0,0909	0,00011
9	Normalna	-8105,155	0,0909	0
10	<i>t</i> -Studenta	-8089,383	0,0909	0,0031
11	Zmiennych niezależnych	-8452,584	0,0909	0

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Prawdopodobieństwa *a posteriori* modeli Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowymi brzegowymi rozkładami skośnymi *t*-Studenta

Lp.	Kopula	$\ln(p(y M))$	$p(M)$	$p(M y)$
1	Franka	-8148,594	0,0909	0
2	Claytona	-8131,529	0,0909	0
3	Gumbela	-8157,282	0,0909	0
4	Claytona-Gumbela (BB1)	-8089,403	0,0909	0,7164
5	Joe-Claytona (BB7)	-8091,892	0,0909	0,0595
6	Symetryzowana Joe-Claytona	-8090,584	0,0909	0,2199
7	Obrócona Claytona	-8228,252	0,0909	0
8	Obrócona Gumbela	-8094,758	0,0909	0,0034
9	Normalna	-8111,274	0,0909	0,0000
10	<i>t</i> -Studenta	-8096,188	0,0909	0,0008
11	Zmiennych niezależnych	-8455,067	0,0909	0

Źródło: opracowanie własne.

Wartości brzegowych gęstości *a posteriori* macierzy obserwacji zostały oszacowane z wykorzystaniem metody Monte Carlo z funkcją ważności (gęstością wielowymiarowego rozkładu *t*-Studenta z 3 stopniami swobody) z zachowaniem odpowiedniej korekty wartości z uwagi na restrykcje narzucone na wartości parametrów każdego z modeli [Osiewalski 2001]. Po ustaleniu charakterystyk funkcji ważności (wektora średnich i macierzy precyzji) wykonano 1 mln symulacji

w ramach każdego modelu. W tabelach 2 i 3 zaprezentowano wyniki porównania 11 modeli Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z, odpowiednio, warunkowym brzegowym rozkładem t -Studenta i warunkowym brzegowym skośnym rozkładem t -Studenta. Dla stóp zwrotu subindeksów WIG-Budownictwo i WIG-Informatyka najbardziej prawdopodobny *a posteriori* jest model z kopułą Claytona-Gumbela. Model AR(1)-GARCH(1,1) z kopułą niezależną uzyskał zerowe prawdopodobieństwo *a posteriori*, modele opisujące niezależne struktury są zdecydowanie odrzucane. W tabeli 4 przedstawiono wyniki porównania wszystkich 22 modeli. Najwyższe wartości prawdopodobieństw *a posteriori* osiągnęły modele z brzegowym warunkowym symetrycznym rozkładem t -Studenta i kopułą Claytona-Gumbela. Niskie prawdopodobieństwo *a posteriori* modeli ze skośnym rozkładem t -Studenta potwierdza stwierdzenie zamieszczone w pracy [Mokrzycka i Pajor 2016, s. 136], że „na wartość współczynnika skośności mają wpływ obserwacje znajdujące się daleko w lewym ogonie”.

Tabela 4. Prawdopodobieństwa *a posteriori* modeli

Lp.	Kopuła		$\ln(p(y M))$	$p(M)$	$p(M y)$
1	Franka	t	-8145,407	0,0455	0
2		t-sk	-8148,594	0,0455	0
3	Claytona	t	-8128,834	0,0455	0
4		t-sk	-8131,529	0,0455	0
5	Gumbela	t	-8149,97	0,0455	0
6		t-sk	-8157,282	0,0455	0
7	Claytona-Gumbela (BB1)	t	-8083,948	0,0455	0,7076
8		t-sk	-8089,403	0,0455	0,0030
9	Joe-Claytona (BB7)	t	-8086,289	0,0455	0,0681
10		t-sk	-8091,892	0,0455	0,0003
11	Symetryzowana Joe-Claytona	t	-8085,13	0,0455	0,2169
12		t-sk	-8090,584	0,0455	0,0009
13	Obrócona Claytona	t	-8128,838	0,0455	0
14		t-sk	-8228,252	0,0455	0
15	Obrócona Gumbela	t	-8092,694	0,0455	0,0001
16		t-sk	-8094,758	0,0455	0,0000
17	Normalna	t	-8105,155	0,0455	0
18		t-sk	-8111,274	0,0455	0
19	t -Studenta	t	-8089,383	0,0455	0,0031
20		t-sk	-8096,188	0,0455	0
21	Zmiennych niezależnych	t	-8452,584	0,0455	0
22		t-sk	-8455,067	0,0455	0

Oznaczenia: t – model z warunkowym brzegowym rozkładem t -Studenta, t-sk – model z warunkowym brzegowym skośnym rozkładem t -Studenta.

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 5. Charakterystyki *a posteriori* oraz NSE i RNE dla wartości oczekiwanych parametrów modeli

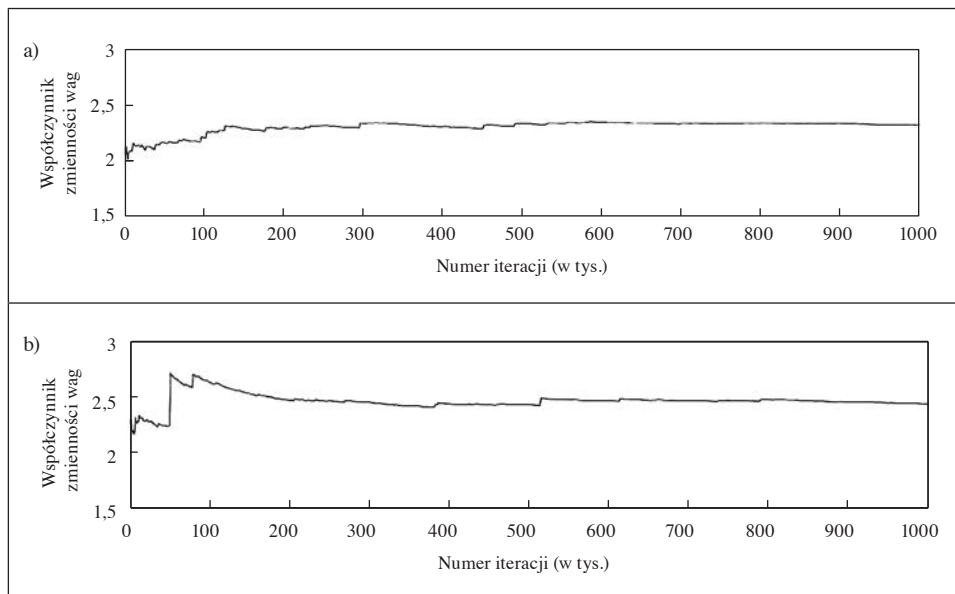
Parametr	Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z brzegowymi rozkładami <i>t</i> -Studenta i kopułą Claytona-Gumbela (BB1)				Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z brzegowymi rozkładami skośnymi <i>t</i> -Studenta i kopułą Claytona-Gumbela (BB1)			
	$E(\text{ly})$	$D(\text{ly})$	NSE	RNE	$E(\text{ly})$	$D(\text{ly})$	NSE	RNE
$\varphi_{1,0}$	0,028	0,023	5,7E-05	0,1586	0,065	0,041	1,1E-04	0,144
$\varphi_{1,1}$	0,072	0,018	4,5E-05	0,1573	0,071	0,018	4,7E-05	0,141
$\alpha_{1,0}$	0,024	0,008	3,2E-05	0,0662	0,024	0,008	3,3E-05	0,067
$\alpha_{1,1}$	0,031	0,007	2,4E-05	0,0862	0,032	0,007	2,4E-05	0,085
$\beta_{1,1}$	0,931	0,016	5,7E-05	0,0760	0,929	0,016	6,0E-05	0,073
ν_1	5,242	0,511	0,00149	0,1170	5,223	0,508	1,5E-03	0,114
$\varphi_{2,0}$	0,048	0,022	5,4E-05	0,1574	0,109	0,039	1,0E-04	0,148
$\varphi_{2,1}$	-0,043	0,018	4,6E-05	0,1564	-0,045	0,018	4,9E-05	0,136
$\alpha_{2,0}$	0,046	0,015	5,9E-05	0,0626	0,045	0,014	4,8E-05	0,091
$\alpha_{2,1}$	0,040	0,009	2,7E-05	0,1031	0,041	0,009	2,7E-05	0,102
$\beta_{2,1}$	0,896	0,024	9,1E-05	0,0692	0,895	0,023	7,6E-05	0,095
ν_2	5,316	0,542	0,00157	0,1189	5,395	0,566	1,9E-03	0,092
θ_1	0,427	0,043	0,00011	0,1572	0,460	0,048	1,3E-04	0,135
θ_2	1,217	0,027	6,9E-05	0,1537	1,203	0,027	7,2E-05	0,141
γ_1	–	–	–	–	0,972	0,023	6,1E-05	0,138
γ_2	–	–	–	–	0,956	0,022	5,8E-05	0,147

Oznaczenia: $E(\text{ly})$ – wartość oczekiwana, $D(\text{ly})$ – odchylenie standardowe.

Źródło: opracowanie własne.

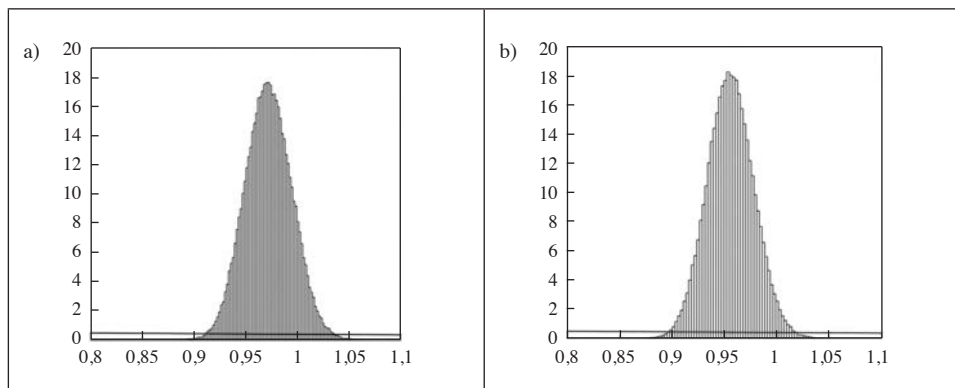
W tabeli 5 przedstawiono charakterystyki *a posteriori* dla wartości oczekiwanych parametrów najbardziej prawdopodobnych modeli oraz błędy numeryczne oszacowań (NSE i RNE). Na rys. 3 przedstawiono współczynnik zmienności wag – na osi poziomej jako jednostkę przyjęto 1000 iteracji. Uzyskane i przedstawione błędy numeryczne w ocenie autorki są do zaakceptowania. Błąd NSE przyjmuje wartości bliskie zeru, a współczynniki zmienności wag γ_n nie wykazują nagłych dużych skoków wartości, jedynie RNE nie jest bliskie jeden, co oznacza, że istnieje możliwość dobrania lepszej funkcji ważności, która efektywniej „typowałaby” obserwacje z faktycznego rozkładu *a posteriori*.

Na rys. 4 zaprezentowano histogramy brzegowych rozkładów *a posteriori* wraz z rozkładem *a priori* parametrów asymetrii γ_1 i γ_2 uzyskane w modelu z kopułą Claytona-Gumbela. Rozkłady tych parametrów są przesunięte nieco w lewo od 1, jedynka znajduje się w obszarze wysokich wartości funkcji gęstości rozkładu *a posteriori*.



Rys. 3. Współczynniki zmienności wag w estymacji modelu Copuła-AR(1)-GARCH(1,1): a) z brzegowymi rozkładami t -Studenta i kopułą Claytona-Gumbela, b) z brzegowymi rozkładami skośnymi t -Studenta i kopułą Claytona-Gumbela

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Histogramy brzegowych rozkładów *a posteriori* parametru asymetrii w modelu dla: a) WIGBUD, b) WIGINF (linia ciągła – gęstość rozkładu *a priori*)

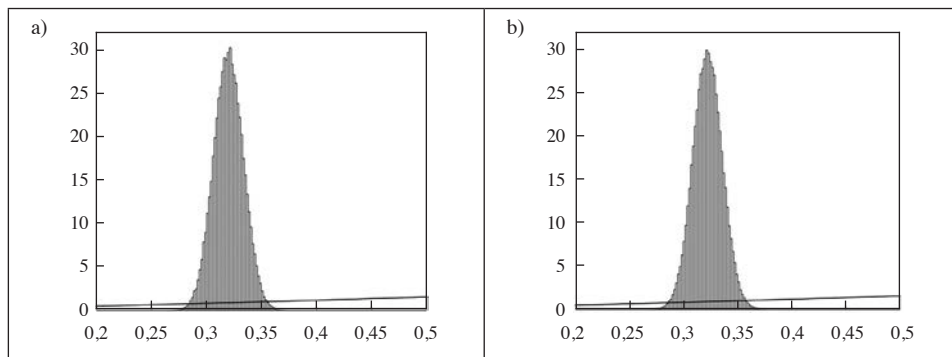
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 6. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe (w nawiasach) *a posteriori* współczynnika tau Kendalla i zależności ogonowych

Kopula	Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z brzegowymi rozkładami <i>t</i> -Studenta			Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z brzegowymi rozkładami skośnymi <i>t</i> -Studenta		
	tau Kendalla	λ^U	λ^L	tau Kendalla	λ^U	λ^L
Franka	0,3366 (0,0119)	0 (0)	0 (0)	0,3364 (0,0119)	0 (0)	0 (0)
Claytona	0,2706 (0,0106)	0 (0)	0,3927 (0,0197)	0,2828 (0,0116)	0 (0)	0,4150 (0,0209)
Obrócona Claytona	0,2706 (0,0106)	0,3928 (0,0197)	0 (0)	0,2505 (0,0122)	0,3541 (0,0238)	0 (0)
Gumbela	0,3125 (0,0121)	0,3895 (0,0135)	0 (0)	0,3149 (0,0127)	0,3921 (0,0142)	0 (0)
Obrócona Gumbela	0,3116 (0,0120)	0 (0)	0,3884 (0,0134)	0,3202 (0,0123)	0 (0)	0,3981 (0,0136)
Claytona-Gumbela (BB1)	0,3200 (0,0134)	0,2322 (0,0224)	0,2622 (0,0309)	0,3220 (0,0135)	0,2199 (0,0229)	0,2838 (0,0325)
Joego-Claytona (BB7)	0,3148 (0,0119)	0,2844 (0,0262)	0,3222 (0,0248)	0,3157 (0,0119)	0,2678 (0,0275)	0,3390 (0,0263)
Symetryzowana Joego-Claytona	–	0,2402 (0,0291)	0,3561 (0,0223)	–	0,2212 (0,0304)	0,3712 (0,0236)
Normalna	0,320 (0,0111)	0 (0)	0 (0)	0,3309 (0,0112)	0 (0)	0 (0)
<i>t</i> -Studenta	0,3288 (0,0123)	0,1669 (0,0401)	0,1669 (0,0401)	0,3283 (0,0123)	0,1621 (0,0404)	0,1621 (0,0404)

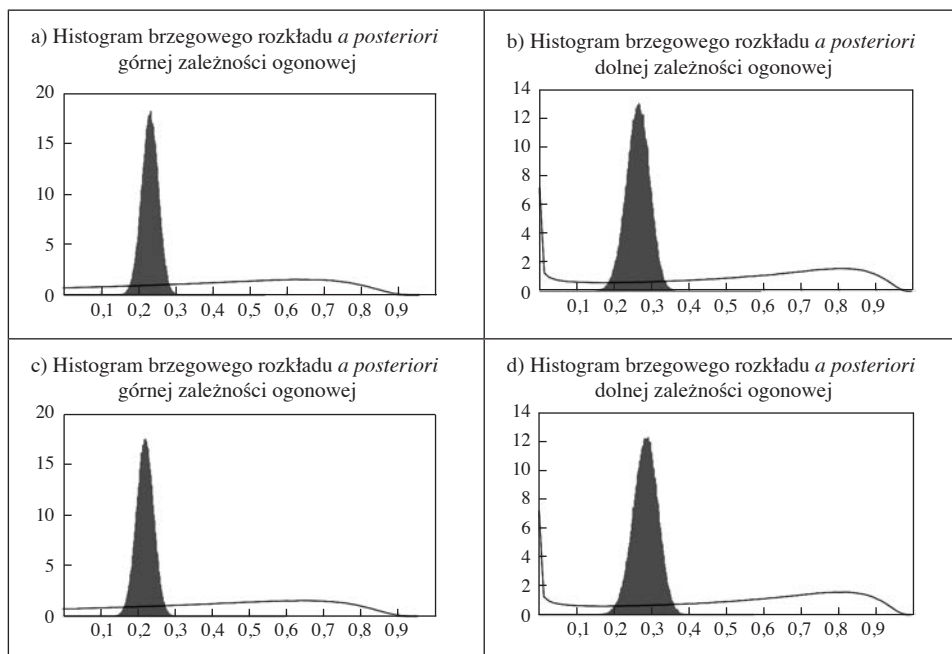
Źródło: opracowanie własne.

Charakterystyki rozkładów *a posteriori* współczynnika tau Kendalla (przedstawione w tabeli 6 i na rys. 5) wskazują na dodatnią zależność, tj. prawdopodobieństwo realizacji wektora losowego uporządkowanego zgodnie jest wyższe niż prawdopodobieństwo niezgodnego uporządkowania tego wektora. Szacowanie zależności ogonowych dało wartości niezerowe, co oznacza niezerowe prawdopodobieństwo równoczesnego przyjmowania wartości ekstremalnych. W modelu z kopułą Claytona-Gumbela na histogramach brzegowego rozkładu *a posteriori* zależności ogonowych (zob. rys. 6) widoczne jest nieznaczne przesunięcie rozkładu parametru dolnej zależności ogonowej w stosunku do rozkładu górnej zależności ogonowej. Wyższą wartość oczekiwaną *a posteriori* uzyskano dla dolnej zależności ogonowej.



Rys. 5. Histogramy brzegowych rozkładów *a posteriori* współczynnika tau Kendalla w modelu z kopułą Claytona-Gumbela: a) dla modelu z brzegowymi rozkładami *t*-Studenta, b) dla modelu z brzegowymi rozkładami skośnymi *t*-Studenta (linia ciągła gęstość rozkładu *a priori*)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 6. Histogramy brzegowych rozkładów *a posteriori* zależności ogonowych w modelu z brzegowymi rozkładami *t*-Studenta (rys. a, b) i skośnymi *t*-Studenta (rys. c, d) (linia ciągła – gęstość rozkładu *a priori*)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 7. Wyniki bayesowskiego łączenia wiedzy dla parametrów wspólnych modeli

Parametr	Copula-AR(1)- -GARCH(1,1) z brzegowymi rozkładami <i>t</i> -Studenta (11 modeli)		Copula-AR(1)- -GARCH(1,1) z brzegowymi rozkładami skośnymi <i>t</i> -Studenta (11 modeli)		Copula-AR(1)- -GARCH(1,1) (22 modele)	
	<i>E</i> (ly)	<i>D</i> (ly)	<i>E</i> (ly)	<i>D</i> (ly)	<i>E</i> (ly)	<i>D</i> (ly)
$\varphi_{1,0}$	0,0284	0,0227	0,0648	0,0408	0,0285	0,0230
$\varphi_{1,1}$	0,0720	0,0177	0,0713	0,0177	0,0720	0,0177
$\alpha_{1,0}$	0,0233	0,0083	0,0242	0,0085	0,0233	0,0083
$\alpha_{1,1}$	0,0310	0,0070	0,0316	0,0070	0,0310	0,0070
$\beta_{1,1}$	0,9315	0,0158	0,9299	0,0160	0,9315	0,0157
ν_1	5,1495	0,5174	5,1366	0,5132	5,1494	0,5194
$\varphi_{2,0}$	0,0486	0,0215	0,1092	0,0388	0,0488	0,0219
$\varphi_{2,1}$	-0,0428	0,0181	-0,0451	0,0182	-0,0428	0,0181
$\alpha_{2,0}$	0,0455	0,0148	0,0455	0,0144	0,0455	0,0148
$\alpha_{2,1}$	0,0400	0,0086	0,0404	0,0086	0,0400	0,0086
$\beta_{2,1}$	0,8956	0,0240	0,8951	0,0235	0,8956	0,0239
ν_2	5,2286	0,5457	5,3144	0,5667	5,2289	0,5482
γ_1	–	–	0,9721	0,0228	–	–
γ_2	–	–	0,9557	0,0223	–	–
tau Kendalla	0,2500	0,1324	0,2508	0,1337	0,2500	0,1324
λ^L	0,2865	0,0494	0,3066	0,0485	0,2866	0,0491
λ^U	0,2373	0,0280	0,2325	0,0352	0,2373	0,0278

Oznaczenia: *E*(ly) – wartość oczekiwana, *D*(ly) – odchylenie standardowe.

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 7 zamieszczono wyniki bayesowskiego łączenia wiedzy dla charakterystyk rozkładu *a posteriori* parametrów modelu. Zastosowanie tej techniki wpłynęło na obniżenie wartości współczynnika tau Kendalla oraz niewielkie zwiększenie wartości dolnej zależności ogonowej w porównaniu z modelem o najwyższym prawdopodobieństwie *a posteriori*.

6. Podsumowanie

W pracy podjęto próbę modelowania zmienności i zależności między finansowymi szeregami czasowymi z wykorzystaniem modeli Copula-AR(1)-

-GARCH(1,1) z brzegowymi warunkowymi rozkładami t -Studenta i skośnymi t -Studenta oraz jedenastoma typami kopul. Do tego celu wykorzystano bayesowskie wnioskowanie statystyczne, które jest podejściem formalnym i całościowym. Z uwagi na skomplikowane postaci gęstości rozkładów *a posteriori* charakterystyki tych 22 rozkładów oszacowano, stosując metodę Monte Carlo z funkcją ważności. Estymacja modeli została wykonana dla logarytmicznych, procentowych stóp zwrotu subindeksów WIG-Budownictwo i WIG-Informatyka. W wyniku formalnego bayesowskiego porównania 22 modeli wytypowano model Copula-AR(1)-GARCH(1,1) z kopulą Clayтона-Gumbela i brzegowym, warunkowym, symetrycznym rozkładem t -Studenta jako model najlepiej opisujący stopy zwrotu subindeksów. W obu przypadkach analizowane modele Copula-GARCH z brzegowym warunkowym rozkładem skośnym t -Studenta uzyskały wartości prawdopodobieństw *a posteriori* dużo niższe od modeli z symetrycznym rozkładem t -Studenta. Uzyskane wyniki potwierdziły, że próbkowa ujemna wartość współczynnika skośności dla zwrotu subindeksów wynika z występowania obserwacji nietypowych w lewym ogonie rozkładu.

Ponadto w pracy zaprezentowano wyniki estymacji współczynnika tau Kendalla oraz zależności ogonowych dla 22 modeli, jak również estymację tych wielkości z zastosowaniem techniki bayesowskiego łączenia wiedzy. Uzyskane wyniki wskazują na częstsze występowanie uporządkowania zgodnego niż niezgodnego w analizowanej parze składowych wektora losowego (dodatnia wartość współczynnika tau Kendalla) oraz występowanie asymetrycznej struktury zależności w ogonach rozkładów (kopula Clayтона-Gumbela).

Literatura

- Bollerslev T. [1986], *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, „Journal of Econometrics”, vol. 31, nr 3, [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1).
- Czado C. [2010], *Pair-Copula Construction of Multivariate Copulas* [w:] *Copula Theory and Its Application*, P. Jaworski, F. Durante, W. Hardle, T. Rychlik (ed.), Lecture Notes in Statistics-Proceedings, Springer, Berlin.
- Doman R. [2010], *Modelling the Dependencies between the Returns on the Worsow Stock Indices Using Time Varying Copulas* [w:] *Financial Markets: Principles of Modelling, Forecasting and Decision-Making*, W. Milo, P. Wdowiński, P. Szafranski (ed.), Find Econ Monograph Series: Advances in Financial Market Analysis, No. 8, Łódź University Press, Łódź.
- Doman R. [2011], *Zastosowania kopuli w modelowaniu dynamiki zależności na rynkach finansowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
- Doman M., Doman R. [2014], *Dynamika zależności na globalnym rynku finansowym*, Difin, Warszawa.
- Durante F., Sempì C. [2016], *Principles of Copula Theory*, CRS Press, Taylor and Francis Group LLC, Boca Raton.

- Fiszeder P. [2009], *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
- Geweke J. [1989], *Bayesian Inference in Econometric Models Using Monte Carlo Integration*, „Econometrica”, vol. 57, nr 6, <https://doi.org/10.2307/1913710>.
- Huard D., Evin G., Favre A.C., [2006], Bayesian Copula Selection, „Computational Statistics and Data Analysis”, vol. 51, nr 2, <https://doi.org/10.1016/j.csda.2005.08.010>.
- Jaworski P. [2012], *Wybrane zagadnienia modelowania zmienności na rynkach finansowych z wykorzystaniem kopuli i procesów GARCH*, <http://docplayer.pl/1206688-Wybrane-zagadnienia-modelowania-zmienności-na-rynkach-finansowych-z-wykorzystaniem-kopuli-i-procesow-garch.html> (data dostępu: 20.04.2017).
- Joe H. [1993], *Parametric Family of Multivariate Distribution with Given Margins*, „Journal of Multivariate Analysis”, vol. 46, nr 2, <https://doi.org/10.1006/jmva.1993.1061>.
- Jondeau E., Rockinger M. [2006], *The Copula-GARCH Model of Conditional Dependencies: An International Stock Market Application*, „Journal of International Money and Finance”, vol. 25, nr 5, <https://doi.org/10.1016/j.jimonfin.2006.04.007>.
- Kloek T., Dijk H.K. van [1978], *Bayesian Estimates of Equation System Parameters. An Application of Integration by Monte Carlo*, „Econometrica”, vol. 46, nr 1, <https://doi.org/10.2307/1913641>.
- Mokrzycka J., Pajor A. [2016], *Formalne porównanie modeli Copula-AR(1)-GRACH(1,1) dla subindeksów indeksu WIG*, „Przegląd Statystyczny”, R. LXIII, z. 2.
- Nelsen R.B. [1999], *An Introduction to Copulas*, Springer-Verlag, New York.
- Osiewalski J. [2001], *Ekonometria bayesowska w zastosowaniach*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- Pajor A. [2003], *Procesy zmienności stochastycznej SV w bayesowskiej analizie finansowych szeregów czasowych*, Monografie: Prace Doktorskie, Nr 2, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- Pajor A. [2017], *Estimating the Marginal Likelihood Using the Arithmetic Mean Identity*, „Bayesian Analysis”, vol. 12, nr 1, <https://doi.org/10.1214/16-ba1001>.
- Patton A.J. [2001], *Modelling Time Varying Exchange Rate Dependence Using the Conditional Copula*, Discussion Paper2001-09 University of California, San Diego.
- Patton A.J. [2006a], *Estimation of Multivariate Models for Time Series of Possibly Different Lengths*, „Journal of Applied Econometrics”, vol. 21, nr 2, <https://doi.org/10.1002/jae.865>.
- Patton A.J. [2006b], *Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence*, „International Economic Review”, vol. 47, nr 2, <https://doi.org/10.1111/j.1468-2354.2006.00387.x>.
- Pipień M. [2006], *Wnioskowanie bayesowskie w ekonometrii finansowej*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- Rossi J.L., Ehlers R.S., Filho M.G.A. [2012], *Copula-GARCH Model Selection: A Bayesian Approach*, Technical Report 88, University of São Paulo, <https://www.semanticscholar.org/paper/Copula-GARCH-Model-Selection%3A-A-Bayesian-Approach-Rossi-Ehlers/fcd1d1dd1fbc3f46ae83f0ae87ae02a5cefb58fe>.
- Silva R., Lopes H.F. [2008], *Copula Marginal Distributions and Model Selection: A Bayesian Note*, „Statistical Computing”, vol. 18, nr 3, <https://doi.org/10.1007/s11222-008-9058-y>.

Comparison Bayesian Copula-AR(1)-GARCH(1,1) Models with Asymmetric Conditional Distribution

The main aim of the paper is to formally assess the relative explanatory power of competing bivariate Copula-AR-GARCH models with symmetric and skewed Student t distributions on the example of data from the The Warsaw Stock Exchange. The subject of comparison were 22 Copula-AR(1)-GARCH (1,1) models, which differed in assumptions on the copula and the occurrence of skewness in marginal distributions. In the context of the models under consideration, Monte Carlo Important Sampling methods were used to estimate the characteristics of *a posteriori* distribution and the marginal density of the observation matrix. For analysing empirical data, *a posteriori* models turned out to be ones more likely to have symmetrical conditional t -Student distributions. For the logarithmic daily growth rates of the two sub-indicies of the stock index WIG, the highest *a posteriori* probability was obtained by the Clayton-Gumbel copula model. The use of the skewed Student's t -distribution did not improve the explanatory power of the Copula-GARCH models.

Keywords: copula, Copula-AR-GARCH model, Bayesian inference, Bayesian model comparison, Bayesian pooling approach, Monte Carlo Important Sampling.

ISSN 1898-6447

UNIWERSYTET EKONOMICZNY W KRAKOWIE
31-510 Kraków, ul. Rakowicka 27
WYDAWNICTWO
www.uek.krakow.pl

Zamówienia na wydane prace przyjmuje
Księgarnia Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie
tel. 12 293-57-40, fax 12 293-50-11
e-mail: ksiegarnia@uek.krakow.pl