

Renata Wróbel-Rotter

Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Ocena stopnia zgodności wybranego modelu równowagi ogólnej z danymi empirycznymi*

Streszczenie

W pracy zaprezentowano techniki wyprowadzenia równań strukturalnych, sposób połączenia z danymi empirycznymi i metody oceny stopnia poprawności specyfikacji estymowanego modelu równowagi ogólnej. Uzyskane rezultaty wskazują, że założenia ekonomiczne leżące u podstaw konstrukcji równań strukturalnych nie są potwierdzone przez obserwacje. Oznacza to, że teoria opisująca kształtowanie się preferencji konsumentów, technologii producentów czy też struktury procesów losowych, wpływających na zmienne makroekonomiczne w czasie, jest zbyt restrykcyjna i nie odpowiada charakterowi zmiennych obserwowanych. W konsekwencji wnioski ekonomiczne wyprowadzane na podstawie zaprezentowanego modelu równowagi ogólnej mogą być obciążone dużym błędem.

Słowa kluczowe: DSGE-VAR, brzegowa gęstość obserwacji, poprawność specyfikacji, model *cash in advance*.

1. Wprowadzenie

Praca ma na celu zastosowanie połączonego modelu wektorowej autoregresji (*dynamic stochastic general equilibrium vector autoregression* – DSGE-VAR) do

* Opracowanie powstało w ramach badań statutowych Katedry Ekonometrii i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie.

sprawdzenia stopnia zgodności z danymi empirycznymi założeń teoretycznych przyjmowanych w wybranym modelu równowagi ogólnej. Metodologia DSGE-VAR wymaga, aby model ekonomiczny, którego założenia opisują zagregowane zachowania konsumentów i producentów, został połączony z danymi empirycznymi, a następnie w sposób formalny, na gruncie technik bayesowskich, dokonuje się wnioskowania o jego parametrach *a posteriori*. Procedura taka umożliwi ocenę potwierdzenia przez obserwacje występujących w przyjętym modelu równowagi ogólnej założeń. Modele DSGE i DSGE-VAR stanowią obecnie dominujący nurt badań empirycznych w zakresie modeli makroekonomicznych opartych na teorii ekonomii, co uzasadnia podjęty w pracy temat. W tym kontekście niniejsza praca wpisuje się w zagadnienia oceny, które z przyjmowanych w nich restrykcyjnych założeń są zgodne z obserwowanymi szeregami makroekonomicznymi. W badaniach empirycznych zwykle jako model alternatywny dla modeli opartych na założeniach wywodzących się z teorii ekonomii przyjmuje się wektorową autoregresję. Zastosowana w pracy koncepcja DSGE-VAR pozwala na swobodny i elastyczny wybór między tymi podejściami. W niniejszej pracy skoncentrowano się na przedstawieniu sposobu łączenia wybranego modelu równowagi ogólnej z danymi empirycznymi oraz zaprezentowano wyniki badań empirycznych. Omówienie zagadnień teoretycznych konstrukcji i estymacji modelu DSGE-VAR wykracza poza ramy pracy, dlatego w tekście zamieszczono stosowne odwołania do literatury poświęconej temu problemowi.

2. Ogólna charakterystyka modelu

2.1. Uwagi wstępne

Analizowany w pracy model należy do grupy, w której zasoby pieniądza bezpośrednio występują w ograniczeniu budżetowym gospodarstw domowych (*cash in advance constraint* – CIA) i został zaproponowany w pracy [Cogley i Nason 1995]. Szersze omówienie modeli należących do tej klasy można znaleźć m.in. w pracy [Walsh 2003]. Składa się on z trzech grup podmiotów: gospodarstw domowych, przedsiębiorstw produkcyjnych i instytucji finansowych oraz banku centralnego. Najważniejszymi podmiotami występującymi w modelu są gospodarstwa domowe, które podejmują kluczowe decyzje dotyczące zmiennych makroekonomicznych w modelowej gospodarce. Nabywają one pojedyncze dobro konsumpcyjne od przedsiębiorstw za gotówkę, którą posiadają z okresu poprzedniego ($t - 1$) oraz otrzymaną w formie wynagrodzenia za pracę w okresie bieżącym t . Gospodarstwa domowe również mają możliwość złożenia części środków pieniężnych w formie depozytu bankowego, z którego otrzymują odsetki.

Institucje finansowe w modelu (banki komercyjne) oprócz depozytów od konsumentów otrzymują w każdym okresie pewną sumę gotówki z banku centralnego i z sumy tych środków udzielają przedsiębiorstwom kredytów na wynagrodzenia za pracę oferowaną przez gospodarstwa domowe. Przepływ pieniądza z banku centralnego do banków komercyjnych jest modelowany egzogenicznym procesem stochastycznym. Przedsiębiorstwa, stosując funkcję produkcji o stałym efekcie skali, zmieniającą się w czasie według egzogenicznie zadanego szoku technologicznego, przekształcają nakład pracy i kapitału w jeden standaryzowany produkt, utożsamiany z produktem całej gospodarki, który następnie jest wykorzystywany jako dobro inwestycyjne uzupełniające zasób kapitału oraz dobro konsumpcyjne dla gospodarstw domowych. Są one właścicielami kapitału i ponoszą jedynie koszty związane z nakładem pracy, które są pokrywane, w każdym okresie, przez fundusze pożyczone z banków komercyjnych. Struktura informacyjna tego modelu jest standardowa i zakłada, że realizacja niepewności w okresie t następuje przed podjęciem decyzji przez podmioty występujące w modelu, w szczególności dotyczy to realizacji egzogenicznych zakłóceń w procesach opisujących ewolucję technologii i stopy wzrostu podaży pieniądza przez bank centralny. Zakłada się, że wszystkie rynki w modelu są doskonale konkurencyjne.

2.2. Gospodarstwa domowe

Reprezentatywne gospodarstwo domowe, o nieskończonym horyzoncie życia, podejmuje decyzje dotyczące poziomu konsumpcji C_t , jedynego dobra występującego w modelowej gospodarce (*single good economy*), depozytów bankowych D_t oraz podaży pracy H_t , maksymalizując oczekiwaną wartość sumy zdyskontowanej użyteczności:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [(1-\varphi) \ln C_t + \varphi \ln(1-H_t)],$$

gdzie:

współczynnik dyskontujący $\beta > 0$ i $\varphi < 1$,

E_0 – operator wartości oczekiwanej warunkowy względem zbioru informacji w okresie zerowym.

Maksymalizacja funkcji kryterium odbywa się warunkowo względem dwóch ograniczeń. Pierwsze z nich dotyczy zasobów pieniężnych, jakimi gospodarstwo domowe dysponuje w okresie t i jakie może przeznaczyć na konsumpcję. Ograniczenie to oznacza, że w każdym momencie t gospodarstwo domowe posiada na bieżącą konsumpcję gotówkę będącą sumą otrzymanego wynagrodzenia za podaż pracy w momencie t oraz zasobu pieniądza z okresu poprzedniego pomniejszonego o wartość depozytu:

$$P_t C_t = W_t H_t + M_t - D_t,$$

gdzie:

P_t – cena dobra konsumpcyjnego,

W_t – nominalna płaca,

$D_t \geq 0$ – brak możliwości zaciągania pożyczek bankowych przez gospodarstwa domowe,

M_t – wartość bazy monetarnej na koniec okresu ($t - 1$).

W modelu występuje niestacjonarny proces stochastyczny, według którego zmienia się w czasie stopa wzrostu podaży pieniądza, $m_t = M_{t+1}/M_t$:

$$\ln m_t = (1 - \rho) \ln m^* + \rho \ln m_{t-1} + \varepsilon_{M,t}, \quad (1)$$

gdzie:

$\varepsilon_{M,t} \sim N(0, \sigma_M^2)$,

m^* – bezwarunkowa średnia stopa wzrostu bazy monetarnej m_t .

Drugie z ograniczeń dotyczy podziału zasobów, jakimi dysponuje gospodarstwo domowe, które mogą zostać przeznaczone na konsumpcję, depozyty bankowe bądź zachowane w formie gotówki przeznaczonej na konsumpcję w okresie następnym ($t + 1$). Na zasoby gospodarstwa domowego składają się: dochód z pracy $W_t H_t$, bieżąca gotówka M_t , odsetki od depozytów $R_{H,t} D_t$ oraz dywidendy od podmiotów, w których posiadają oni udziały: przedsiębiorstw produkcyjnych F_t oraz banków komercyjnych B_t . Przy takich założeniach ograniczenie budżetowe gospodarstwa domowego przybiera postać:

$$M_{t+1} = F_t + B_t + R_{H,t} D_t + (W_t H_t + M_t - D_t - P_t C_t), \quad (2)$$

gdzie:

F_t oraz B_t – nominalne kwoty dywidendy odpowiednio od przedsiębiorstw produkcyjnych i banków,

$R_{H,t}$ – całkowita (brutto) nominalna stopa procentowa otrzymywana od depozytów ($R_{H,t} = 1 + r$, gdzie r jest właściwą stopą procentową).

Zagadnienie maksymalizacji użyteczności gospodarstw domowych można zapisać w formie funkcji Lagrange'a w postaci:

$$L_t^* = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ (1 - \varphi) \ln C_t + \varphi \ln(1 - H_t) + \\ + \lambda_t [F_t + B_t + R_{H,t} D_t + W_t H_t + M_t - M_{t+1} - D_t - P_t C_t] \},$$

skąd, po przyrównaniu do zera pierwszych pochodnych cząstkowych L_t^* po C_t i H_t :

$$1) \frac{\partial L_t^*}{\partial C_t} = \beta^t [(1 - \varphi) C_t^{-1} - \lambda_t P_t], \text{ skąd:}$$

$$\lambda_t = (1 - \varphi) \frac{1}{P_t C_t} \quad (3)$$

oznaczające, że mnożnik Lagrange'a jest krańcową użytecznością konsumpcji nominalnej dla gospodarstw domowych w okresie t ;

2) $\frac{\partial L_t^*}{\partial H_t} = \beta' [-\varphi(1 - H_t)^{-1} + \lambda_t W_t]$, skąd otrzymujemy $\varphi(1 - H_t)^{-1} = \lambda_t W_t$ i dalej:

$$\lambda_t = \frac{\varphi}{(1 - H_t) W_t}. \quad (4)$$

Zależności (3) i (4) prowadzą do następującego równania: $\frac{\varphi}{1 - \varphi} \frac{C_t P_t}{1 - H_t} = W_t$, skąd otrzymujemy warunek: $\frac{\varphi}{1 - \varphi} \frac{C_t}{1 - H_t} = \frac{W_t}{P_t}$, oznaczający równość krańcowej stopy substytucji pracy konsumpcją $\left(\frac{\partial U_t}{\partial H_t} / \frac{\partial U_t}{\partial C_t}\right)$ i stawki płacy realnej. Dodatkowo uwzględnienie dwóch warunków równowagi, z których pierwszy: $L_t = N_t W_t$ oznacza, że kwota pożyczek bankowych L_t jest równa całkowitemu kosztowi wynagrodzeń $N_t W_t$, czyli przedsiębiorstwa produkcyjne finansują koszty pracy z kredytów, oraz drugi: $H_t = N_t$ oznacza, że popyt na pracę równa się jej podaży, prowadzą do równania Eulera opisującego warunek równowagi międzyokresowej na rynku pracy:

$$\frac{\varphi}{1 - \varphi} \frac{C_t P_t}{1 - H_t} = \frac{L_t}{N_t}, \quad (5)$$

która wyraża krańcową stopę substytucji między konsumpcją i czasem pracy oraz jednocześnie uwzględnia warunek równowagi podaży i popytu na pracę.

Gospodarstwa domowe podejmują decyzje dotyczące wartości depozytów składanych w banku oraz ilości zasobów pieniężnych na okres następny: $\frac{\partial L_t^*}{\partial D_t} = \beta' (\lambda_t R_{H,t} - \lambda_t)$ oraz $\frac{\partial L_t^*}{\partial M_{t+1}} = E_0 \beta' (-\lambda_t + \beta \lambda_{t+1})$, skąd otrzymujemy równanie Eulera opisujące warunek międzyokresowej równowagi na rynku kredytu:

$$\frac{1}{C_t P_t} - \beta R_{H,t} E_0 \left(\frac{1}{C_{t+1} P_{t+1}} \right) = 0. \quad (6)$$

2.3. Przedsiębiorstwa produkcyjne

Przedsiębiorstwa produkcyjne działają na rynku doskonale konkurencyjnym i w procesie decyzyjnym posługują się dwoma zagadnieniami optymalizacyjnymi, związanymi z ustaleniem popytu na czynniki produkcji. Pierwsze z nich dotyczy

wyboru odpowiedniego nakładu kapitału, drugie natomiast jest związane z ustaleniem optymalnego nakładu pracy poprzez minimalizację kosztu wytworzenia danej wielkości produkcji. Zasoby kapitału rzeczowego są własnością przedsiębiorstw, które w każdym momencie czasu podejmują decyzje dotyczące jego poziomu K_{t+1} w następnym okresie, dokonując wyboru między zwiększeniem bieżącej dywidendy F_t , płaconej gospodarstwom domowym, a akumulowaniem większej jego ilości. W każdym z okresów przedsiębiorstwa rozwiązują następujące zagadnienie maksymalizacji oczekiwanego zdyskontowanego strumienia dywidendy:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t+1} \frac{F_t}{C_{t+1} P_{t+1}},$$

przy czym dla gospodarstwa domowego jednostka nominalnej dywidendy ma wartość wyrażoną w jednostkach konsumpcji, którą gospodarstwo może nabyć w okresie $(t + 1)$, dlatego poziom dywidendy z okresu t jest zdyskontowany wartością krańcowej użyteczności konsumpcji z okresu $(t + 1)$. Zagadnienie optymalizacyjne jest rozwiązywane przy trzech ograniczeniach określających warunki równowagi w modelowej gospodarce.

I. Pierwsze z nich definiuje ograniczenie zasobowe w gospodarce:

$$F_t + R_{F,t} L_t + W_t N_t - L_t = P_t (Y_t - I_t),$$

gdzie:

N_t – popyt na pracę,

Y_t – nakład kapitału rzeczowego,

I_t – inwestycje,

$R_{F,t}$ – całkowita stopa procentowa płacona przez przedsiębiorstwa od kredytów bankowych,

P_t – cena sprzedaży dobra produkcyjnego traktowana egzogenicznie ze względu na założenie doskonałej konkurencji dla rynku produktu. Technologia w modelu jest opisana funkcją produkcji Cobba i Douglasa o stałym efekcie skali produkcji:

$$Y_t = K_t^a (A_t N_t)^{1-a}, \quad (7)$$

gdzie $0 < a < 1$ oraz A_t – niestacjonarny szok technologiczny, opisany procesem błądzenia losowego z dryfem:

$$\ln A_t = \gamma + \ln A_{t-1} + \varepsilon_{A,t}, \quad (8)$$

gdzie $\gamma > 0$, $\varepsilon_{A,t} \sim N(0, \sigma_A^2)$ i jest zmienną losową niezależną od innowacji $\varepsilon_{M,t}$ w równaniu opisującym proces dla stopy wzrostu podaży pieniądza. Zmienna ta odzwierciedla w modelu źródła zakłóceń występujące w sferze realnej gospodarki,

które w tym przypadku przenoszone są do funkcji produkcji poprzez fluktuacje nakładu pracy.

II. Drugie ograniczenie definiuje równanie inwestycji standardowej postaci, określając ich poziom jako różnicę między K_{t+1} , oznaczającym planowany w okresie t zasób kapitału na okres $(t + 1)$, a bieżącą jego wartością po uwzględnieniu deprecjacji: $I_t = K_{t+1} - (1 - \delta)K_t$, gdzie $0 < \delta < 1$ oznacza stopę deprecjacji kapitału w okresie t .

III. Trzecia zależność wynika z finansowania całości kosztu wynagrodzenia pracy przez przedsiębiorstwa produkcyjne z kredytów bankowych: $L_t = N_t W_t$. Z równania tego otrzymujemy zależność na płacę nominalną:

$$W_t = L_t / N_t. \quad (9)$$

Zagadnienie maksymalizacji oczekiwanej wartości sumy zdyskontowanej dywidendy można zapisać w formie równania Lagrange'a postaci:

$$L_t^* = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t+1} \left\{ \frac{F_t}{C_{t+1} P_{t+1}} + \mu_t [L_t + P_t [K_t^\alpha (A_t N_t)^{1-\alpha} - K_{t+1} + (1 - \delta)K_t] - F_t - R_{F,t} L_t - W_t N_t] \right\},$$

prowadzącej do następującego warunku pierwszego rzędu dla optymalnego nakładu kapitału w okresie $(t + 1)$:

$$\frac{\partial L_t^*}{\partial K_{t+1}} = \beta^t \mu_t P_t + E_0 \beta^{t+1} \mu_{t+1} [P_{t+1} \alpha K_{t+1}^{\alpha-1} (A_{t+1} N_{t+1})^{1-\alpha} + (1 - \delta)],$$

skąd otrzymujemy:

$$E_0 \beta \mu_{t+1} [P_{t+1} \alpha K_{t+1}^{\alpha-1} (A_{t+1} N_{t+1})^{1-\alpha} + (1 - \delta)] = \mu_t.$$

Uwzględniając wartość mnożnika Lagrange'a μ_t , uzyskanego z warunku pierwszego rzędu, wynikającego z maksymalizacji dywidendy przeznaczonej dla gospodarstw domowych:

$$\frac{\partial L_t^*}{\partial F_t} = E_0 \beta^{t+1} [(C_{t+1} P_{t+1})^{-1} - \mu_t],$$

otrzymujemy równanie:

$$E_0 \left[-\frac{P_t}{P_{t+1} C_{t+1}} + \beta \frac{P_{t+1}}{P_{t+2} C_{t+2}} \alpha K_{t+1}^{\alpha-1} (A_{t+1} N_{t+1})^{1-\alpha} + (1 - \delta) \right] = 0, \quad (10)$$

opisujące optymalne zaangażowanie kapitału na okres $(t + 1)$.

Funkcja popytu na pracę jest ustalana przez przedsiębiorstwa poprzez rozwiązanie zagadnienia minimalizacji kosztu uzyskania ustalonej wielkości produkcji w danym okresie t :

$$\min_{N_t} (P_t Y_t - W_t N_t R_{F,t}) \text{ przy warunku: } Y_t = K_t^\alpha (A_t N_t)^{1-\alpha},$$

które prowadzi do następującego warunku pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial L_t^*}{\partial N_t} = P_t(1-\alpha)K_t^\alpha A_t^{1-\alpha} N_t^{-\alpha} - W_t R_{F,t},$$

skąd, po przyrównaniu do zera, otrzymujemy równanie stopy procentowej:

$$R_{F,t} = P_t(1-\alpha)K_t^\alpha A_t^{1-\alpha} N_t^{-\alpha} / W_t, \quad (11)$$

oznaczające, że jest ona określana przez decyzje przedsiębiorstw produkcyjnych w zakresie popytu na pracę, determinujące ponoszony koszt pracy i w konsekwencji potrzeby pożyczkowe L_t . Stopa procentowa jest ustalana tak, aby zrównać nominalną wartość krańcowej produktywności pracy z nominalnym krańcowym kosztem wynagrodzenia dodatkowej jednostki pracy $R_{F,t} W_t$, co oznacza również, że wyraża się przez iloraz wartości krańcowego produktu pracy i nominalnej stawki płacy W_t .

2.4. Banki komercyjne

Podmioty finansowe podejmują decyzje dotyczące maksymalizacji oczekiwanej, nieskończonej sumy zdyskontowanej dywidendy B_t wypłacanej gospodarstwom domowym, które są ich właścicielami:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^{t+1} \frac{B_t}{C_{t+1} P_{t+1}},$$

przy czym, podobnie jak w przypadku przedsiębiorstw produkcyjnych, poziom dywidendy z okresu t jest dyskontowany wartością krańcowej użyteczności konsumpcji z okresu $(t+1)$. Decyzje podmiotów finansowych są dokonywane przy uwzględnieniu następujących trzech ograniczeń:

a) ograniczenia budżetowego:

$$B_t + R_{H,t} D_t + L_t = R_{L,t} L_t + D_t + X_t, \quad (12)$$

gdzie lewa strona jest sumą wypłaconej gospodarstwom dywidendy B_t , depozytów wraz z odsetkami $R_{H,t} D_t$ oraz wartości nominalnej udzielonych pożyczek L_t , strona prawa jest sumą przychodów od udzielonych kredytów $R_{L,t} L_t$, depozytów gospodarstw domowych D_t i podaży pieniądza $X_t = M_{t+1} - M_t$ otrzymywanego od banku centralnego;

b) warunku równości należności i zobowiązań banku: $L_t = D_t + X_t$;

c) restrykcji dotyczącej warunku zerowych zysków ekonomicznych banków komercyjnych na ścieżce równowagi w modelu: $R_{L,t}(L_t - X_t) = R_{H,t} D_t$. Oznacza to równość zysków z udzielonych kredytów, skorygowanych o kwotę pieniądza uzyskanego z banku centralnego i odsetek od przyjętych depozytów gospodarstw domowych.

Rozwiązanie zagadnienia optymalizacyjnego podmiotów finansowych sprowadza się do definicji równania opisującego kształtowanie się dywidendy dla gospodarstw domowych:

$$B_t = L_t R_{L,t} - R_{H,t} D_t + D_t - L_t + X_t.$$

3. Równowaga

Równowaga modelowej gospodarki jest zachowana, jeśli wszystkie rynki: dóbr, pracy, kredytowy i pieniądza znajdują się w równowadze, przy tym:

1) na rynku kredytu równowaga zachodzi, jeśli wartość udzielonych przedsiębiorstwom przez banki komercyjne kredytów jest równa wartości depozytów powiększonej o ilość pieniądza dostarczanego przez bank centralny: $L_t = D_t + X_t$, co po uwzględnieniu warunku zerowych zysków na ścieżce równowagi: $R_{L,t}(L_t - X_t) = R_{H,t} D_t$ prowadzi do równości stopy procentowej kredytów i depozytów: $R_{L,t} = R_{H,t} = R_t$. Uwzględnienie ostatniej zależności w ograniczeniu budżetowym podmiotów finansowych (12) oraz warunku:

$$L_t - D_t = X_t \quad (13)$$

prowadzi do wniosku, że w równowadze dywidenda płacona gospodarstwom domowym przez banki komercyjne jest dana zależnością: $B_t = R_t X_t$;

2) na rynku pieniądza równowaga zachodzi, jeśli popyt na pieniądź jest równy jego podaży. Popyt na pieniądź można utożsamić z wartością popytu konsumpcyjnego, natomiast podaż pieniądza jest równa nominalnej wartości pieniądza w obiegu oraz podaży ze strony banku centralnego, co prowadzi do następującego warunku „oczyszczającego” rynek pieniądza:

$$P_t C_t = M_t + X_t; \quad (14)$$

3) na rynku pracy równowaga zachodzi, jeśli popyt na pracę zgłaszany przez przedsiębiorstwa produkcyjne jest równy podaży pracy oferowanej przez gospodarstwa domowe: $N_t = H_t$. Oznacza to, że równanie Eulera opisujące równowagę na rynku pracy (5) przybiera postać: $\frac{\varphi}{1-\varphi} \frac{C_t P_t}{1-N_t} = \frac{L_t}{N_t}$;

4) na rynku dóbr równowaga zachodzi, jeśli popyt konsumpcyjny i inwestycyjny są równe podaży produktu w gospodarce. Uwzględniając w ograniczeniu budżetowym gospodarstw domowych (2) ograniczenie zasobowe przedsiębiorstw produkcyjnych: $F_t = -R_{F,t} L_t - W_t N_t + L_t + P_t (Y_t - I_t)$ i warunki równowagi rynku kredytu ($R_{L,t} = R_{H,t} = R_t$), otrzymujemy następującą jego postać:

$$M_{t+1} - M_t = -R_t L_t - W_t N_t + L_t + P_t(Y_t - I_t) + B_t + R_t D_t + W_t H_t - D_t - P_t C_t,$$

która, po uwzględnieniu warunków równoważenia się rynku pracy: $N_t = H_t$, zapisaniu równania zmiany bazy monetarnej: $X_t = M_{t+1} - M_t$ i spełnieniu wymogu równowagi na rynku kredytu: $B_t = R_t X_t$, prowadzi do postaci:

$$X_t = L_t - D_t - R_t L_t + R_t X_t + R_t D_t + P_t(Y_t - I_t) - P_t C_t.$$

Uwzględnienie warunku zerowych zysków ekonomicznych na ścieżce równowagi podmiotów finansowych: $R_t(L_t - X_t) = R_t D_t$ i równania inwestycji: $I_t = K_{t+1} - (1 - \delta)K_t$ prowadzi do ostatecznej postaci, definiującej ograniczenie zasobowe teoretycznej gospodarki i zapewniającej jej równowagę:

$$C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t = K_t^\alpha (A_t N_t)^{1-\alpha}. \quad (15)$$

4. Eliminacja trendów stochastycznych

Model w postaci niestacjonarnej składa się z jedenastu równań strukturalnych. Tworzą je trzy warunki pierwszego rzędu zagadnień optymalizacyjnych: równania Eulera dla rynku dóbr (10), równania Eulera dla rynku kredytu (6) i równania opisującego równowagę międzyokresową na rynku pracy (5), które wiążą ścieżki procesów kształtujących produkcję, nakład pracy, podaż pieniądza i kredytu w równowadze. Kolejne równania są definiowane przez warunki zachowania równowagi na poszczególnych rynkach i w gospodarce, w szczególności: ograniczenie zasobowe gospodarki (15), warunki równowagi na rynku pieniądza (14) i warunek równowagi na rynku kredytu (13). Model uzupełniają dwa procesy stochastyczne ujmujące zakłócenia realne i nominalne w modelu, które opisują: ewolucję technologii w czasie (8) i zmianę stopy wzrostu bazy monetarnej (1). Otrzymujemy w ten sposób sześć równań strukturalnych (5), (6), (10), (13), (14) i (15), które umożliwiają wyznaczenie sześciu zmiennych: K_{t+1} , N_t , D_t , C_t , L_t i P_t , oraz dwa niestacjonarne procesy stochastyczne (1) i (8) odpowiedzialne za fluktuacje zmiennych makroekonomicznych. Mając wartości tych zmiennych w równowadze, można wyznaczyć pozostałe interesujące wielkości: poziom produkcji (7), płacę nominalną (9) i nominalną stopę procentową (11) oraz inne zmienne, w szczególności wskaźnik inflacji $\pi_t = P_{t+1} / P_t$ oraz płacę realną $w_t = W_t / P_t$. Optymalizacja decyzji jest dokonywana dla każdego t , co oznacza, że równania strukturalne modelu są spełnione dla każdego z momentów czasu, stąd wartość oczekiwana w równaniach Eulera jest rozważana warunkowo względem zbioru informacji w okresie t .

Niestacjonarność procesów stochastycznych modelujących ewolucję technologii oraz zmiany stopy wzrostu bazy monetarnej skutkuje obecnością trendów

stochastycznych w zmiennych makroekonomicznych, które należy wyeliminować przed rozwiązaniem modelu i znalezieniem równowagi. Sprowadzenie do stacjonarności zmiennych realnych C_t , Y_t , I_t oraz K_{t+1} uzyskujemy poprzez eliminację trendu mającego swoje źródło w zakłóceniach technologicznych: $\hat{c}_t = C_t/A_t$, $\hat{y}_t = Y_t/A_t$, $\hat{i}_t = I_t/A_t$ oraz $\hat{K}_{t+1} = K_{t+1}/A_t$. Zmienne nominalne są oczyszczane z trendu stochastycznego po podzieleniu ich przez zasób pieniądza: $\hat{D}_t = D_t/M_t$, $\hat{L}_t = L_t/M_t$, $\hat{W}_t = W_t/M_t$, $\hat{X}_t = X_t/M_t$, $M_{t+1}/M_t - 1 = m_t - 1$ oraz ceny: $\hat{P}_t = P_t A_t / M_t$. W modelu zakłada się, że nakład pracy jest zmienną stacjonarną oznaczającą, że nie występuje wzrost populacji w gospodarce.

Strukturalne równania modelu zapisane dla zmiennych po eliminacji trendów stochastycznych przybierają następującą postać:

1) równanie Eulera dla rynku dóbr (10):

$$E_t \left[-\frac{P_t A_t}{M_t} \frac{M_t}{M_{t+1}} \frac{M_{t+1}}{P_{t+1} A_{t+1}} \frac{A_{t+1}}{C_{t+1}} + \right. \\ \left. + \beta \frac{P_{t+1} A_{t+1}}{M_{t+1}} \frac{M_{t+1}}{M_{t+2}} \frac{A_t}{A_{t+1}} \frac{A_{t+2}}{C_{t+2}} \frac{M_{t+2}}{P_{t+2} A_{t+2}} \left[\alpha \left(\frac{K_{t+1}}{A_t} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{A_t}{A_{t+1}} \right)^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta) \right] \right] = 0 \\ E_t \left[-\frac{\hat{P}_t}{\hat{P}_{t+1} \hat{C}_{t+1} m_t} + \beta \frac{\hat{P}_{t+1}}{\hat{P}_{t+2} \hat{C}_{t+2} m_{t+1}} \left(\frac{A_{t+1}}{A_t} \right)^{-1} \left[\alpha \hat{K}_{t+1}^{\alpha-1} \left(\frac{A_{t+1}}{A_t} \right)^{1-\alpha} N_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta) \right] \right] = 0,$$

skąd po uwzględnieniu równania na stopę wzrostu technologii (22) otrzymujemy:

$$E_t \left[-\frac{\hat{P}_t}{\hat{P}_{t+1} \hat{C}_{t+1} m_t} + \beta \frac{\hat{P}_{t+1}}{\hat{P}_{t+2} \hat{C}_{t+2} m_{t+1}} \cdot \left[\alpha \hat{K}_{t+1}^{\alpha-1} \exp\{-\alpha(\gamma + \varepsilon_{A,t+1})\} N_{t+1}^{1-\alpha} + \right. \right. \\ \left. \left. + (1-\delta) \exp\{-(\gamma + \varepsilon_{A,t+1})\} \right] \right] = 0; \quad (16)$$

2) równanie Eulera dla rynku kredytu (6):

$$\frac{A_t M_t}{C_t P_t A_t} - \beta R_t E_t \left(\frac{A_{t+1}}{C_{t+1}} \frac{M_{t+1}}{P_{t+1} A_{t+1}} \frac{M_t}{M_{t+1}} \right) = 0$$

i po uwzględnieniu równania na stopę procentową dla zmiennych pozbawionych trendu stochastycznego (25) otrzymujemy:

$$\frac{1}{\hat{C}_t \hat{P}_t} - \beta \left((1-\alpha) \hat{P}_t \hat{K}_t^\alpha N_t^{1-\alpha} \exp\{-\alpha(\gamma + \varepsilon_{A,t})\} / \hat{W}_t \right) E_0 \left(\frac{1}{\hat{C}_{t+1} \hat{P}_{t+1} m_t} \right) = 0,$$

co, po uwzględnieniu na płacy nominalnej (24), prowadzi do ostatecznej postaci:

$$\frac{1}{\hat{C}_t \hat{P}_t} - \frac{\beta (1-\alpha) \hat{P}_t \hat{K}_t^\alpha N_t^{1-\alpha} \exp\{-\alpha(\gamma + \varepsilon_{A,t})\}}{m_t \hat{L}_t} E_t \left(\frac{1}{\hat{C}_{t+1} \hat{P}_{t+1}} \right) = 0; \quad (17)$$

3) równanie równowagi na rynku pracy (5): $\frac{\varphi}{1-\varphi} \frac{C_t}{A_t} \frac{1}{1-N_t} \frac{P_t A_t}{M_t} = \frac{L_t}{M_t} \frac{1}{N_t}$, skąd:

$$\frac{\varphi}{1-\varphi} \frac{\hat{C}_t \hat{P}_t}{1-\hat{N}_t} = \frac{\hat{L}_t}{N_t}; \quad (18)$$

4) ograniczenie zasobowe gospodarki (15):

$$\frac{C_t}{A_t} + \frac{K_{t+1}}{A_t} + (1-\delta) \frac{K_t}{A_{t-1}} \left(\frac{A_t}{A_{t-1}} \right)^{-1} = \left(\frac{K_t}{A_{t-1}} \right)^\alpha N_t^{1-\alpha} \left(\frac{A_t}{A_{t-1}} \right)^{-\alpha}$$

i po uwzględnieniu równania na stopę wzrostu technologii (22) otrzymujemy:

$$\hat{C}_t + \hat{K}_{t+1} - (1-\delta) \hat{K}_t \exp\{-(\gamma + \varepsilon_{A,t})\} = \hat{K}_t^\alpha N_t^{1-\alpha} \exp\{-\alpha(\gamma + \varepsilon_{A,t})\}; \quad (19)$$

5) warunek równowagi na rynku pieniądza (14), skąd: $P_t C_t = M_t + (M_{t+1} - M_t)$ i po obustronnym podzieleniu przez $A_t (M_t/A_t)$ otrzymujemy:

$$\hat{P}_t \hat{C}_t = m_t; \quad (20)$$

6) warunek równowagi na rynku kredytu (13), skąd: $\frac{L_t}{M_t} = \frac{X_t}{M_t} + \frac{D_t}{M_t}$ oraz $X_t = M_{t+1} - M_t$, co prowadzi do postaci:

$$\hat{L}_t = m_t - 1 + \hat{D}_t; \quad (21)$$

7) ewolucja technologii (8), skąd:

$$\frac{A_t}{A_{t-1}} = \exp(\gamma + \varepsilon_{A,t}); \quad (22)$$

8) funkcja produkcji (7), skąd: $\frac{Y_t}{A_t} = \left(\frac{K_t}{A_{t-1}} \right)^\alpha N_t^{1-\alpha} \left(\frac{A_t}{A_{t-1}} \right)^{-\alpha}$ i po uwzględnieniu równania ewolucji technologii (22):

$$\hat{Y}_t = \hat{K}_t^\alpha N_t^{1-\alpha} \exp\{-\alpha(\gamma + \varepsilon_{A,t})\}; \quad (23)$$

9) płaca nominalna (9), skąd: $\frac{W_t}{M_t} = \frac{L_t}{M_t} / N_t$ i dalej:

$$\hat{W}_t = \hat{L}_t / N_t; \quad (24)$$

10) nominalna stopa procentowa (11), skąd po obustronnym podzieleniu przez $M_t A_{t-1}^\alpha$ otrzymujemy: $R_t = P_t \frac{A_t}{M_t} (1-\alpha) \left(\frac{K_t}{A_{t-1}} \right)^\alpha \left(\frac{A_t}{A_{t-1}} \right)^{-\alpha} N_t^{-\alpha} / \frac{W_t}{M_t}$ co, po uwzględnieniu równania stopy wzrostu technologii (22), prowadzi do ostatecznej postaci równania stopy procentowej:

$$R_t = (1-\alpha) \hat{P}_t \hat{K}_t^\alpha N_t^{-\alpha} \exp\{-\alpha(\gamma + \varepsilon_{A,t})\} / \hat{W}_t. \quad (25)$$

5. Model w postaci strukturalnej

Model w postaci strukturalnej tworzy jedenaście równań, na które składają się: trzy warunki pierwszego rzędu, opisujące równania Eulera dla dóbr (16) i kredytu (17) oraz warunek międzyokresowej równowagi na rynku pracy (18), trzy warunki równowagi na rynkach: ograniczenia zasobowego gospodarki (19), równania zapewniające równowagę na rynku pieniądza (20) i kredytu (21), dwa procesy stochastyczne wprowadzające zakłócenia do modelu: procesu ewolucji technologii (22) i stopy wzrostu podaży pieniądza (1), trzy równania definiujące dodatkowe zmienne występujące w modelu: zagregowana produkcja (23), płaca nominalna (24) i nominalna stopa procentowa (25). Tworzą one nieliniowy układ równań, w którym występują zmienne w formie wartości oczekiwanych. Estymacja parametrów strukturalnych wymaga zdefiniowania równań obserwacji łączących zmienne w konstrukcji teoretycznej ze zmiennymi obserwowanymi. Zmienne obserwowane należy przekształcić tak, aby korespondowały ze zmiennymi teoretycznymi zdefiniowanymi w modelu, w szczególności sprowadzić do stacjonarności. W prezentowanym przypadku konstrukcja równania obserwacji opiera się na dwóch obserwowanych szeregach czasowych: zagregowanej produkcji Y_t^{obs} i poziomie cen w gospodarce P_t^{obs} [Schorfheide 2000]. Model jest szacowany na dwóch szeregach czasowych: kwartalnej stopie wzrostu PKB: $\Delta \ln PKB_t = Y_t^{obs} / Y_{t-1}^{obs}$ i wskaźniku inflacji $\Delta \ln P_t = P_t^{obs} / P_{t-1}^{obs}$. Jako miarę zagregowanej produkcji PKB_t przyjęto realny produkt krajowy brutto *per capita* w USA, w okresie I kwartał 1950–IV kwartał 1997, natomiast delator PKB przyjęto jako miarę poziomu cen w gospodarce. Logarytm i pierwsze różnice są obliczone w celu uzyskania kwartalnych stóp wzrostu produkcji i inflacji, estymację wykonano w programie Dynare.

Zagregowany produkt w gospodarce jest szeregiem niestacjonarnym i może zostać potraktowany jako bezpośredni odpowiednik zagregowanej produkcji Y_t w konstrukcji teoretycznej modelu. Metody rozwiązywania i estymacji parametrów strukturalnych modelu w przeważającej części wymagają spełnienia założenia stacjonarności zmiennych makroekonomicznych, dlatego zarówno zmienna obserwowana Y_t^{obs} , jak i nieobserwowana Y_t zostaną wyrażone w formie stacjonarnych przyrostów: $Y_t^{obs} / Y_{t-1}^{obs}$ oraz Y_t / Y_{t-1} , co prowadzi do równości: $\frac{Y_t^{obs}}{Y_{t-1}^{obs}} = \frac{Y_t}{Y_{t-1}}$.

Równania strukturalne modelu zostały zapisane dla zmiennych uzyskanych po wyeliminowaniu trendu stochastycznego $\hat{Y}_t = Y_t / A_t$, skąd: $Y_t = A_t \hat{Y}_t$ i w konsekwencji:

$$\frac{Y_t}{Y_{t-1}} = \frac{A_t}{A_{t-1}} \frac{\hat{Y}_t}{\hat{Y}_{t-1}} = \exp(\gamma + \varepsilon_{A,t}) \frac{\hat{Y}_t}{\hat{Y}_{t-1}},$$

co prowadzi do postaci równania obserwacji dla zagregowanej produkcji postaci:

$$\frac{Y_t^{obs}}{Y_{t-1}^{obs}} = \exp(\gamma + \varepsilon_{A,t}) \frac{\hat{Y}_t}{\hat{Y}_{t-1}}. \quad (26)$$

Analogiczne postępowanie dotyczy obserwowanego poziomu cen w gospodarce P_t^{obs} , który jest zmienną niestacjonarną i bezpośrednio odpowiada niestacjonarnej zmiennej P_t w konstrukcji teoretycznej. Sprowadzenie do stacjonarności szeregu obserwowanego poziomu cen standardowo uzyskuje się poprzez rozważenie pierwszych przyrostów (wskaźników inflacji): P_t^{obs}/P_{t-1}^{obs} oraz, w konsekwencji, P_t/P_{t-1} . Iloraz poziomów cen dla zmiennych zdefiniowanych w modelu można zapisać w postaci zmiennych oczyszczonych z trendu stochastycznego w postaci:

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = \frac{\hat{P}_t M_t / \hat{P}_{t-1} M_{t-1}}{A_t} = \frac{\hat{P}_t}{\hat{P}_{t-1}} \frac{M_t}{M_{t-1}} \left(\frac{A_t}{A_{t-1}} \right)^{-1} = \frac{\hat{P}_t}{\hat{P}_{t-1}} m_{t-1} \exp\{-(\gamma + \varepsilon_{A,t})\},$$

skąd otrzymujemy ostateczną postać równania obserwacji dla wskaźnika inflacji:

$$\frac{P_t^{obs}}{P_{t-1}^{obs}} = \frac{\hat{P}_t}{\hat{P}_{t-1}} m_{t-1} \exp\{-(\gamma + \varepsilon_{A,t})\}. \quad (27)$$

Model przygotowany do estymacji składa się ostatecznie z trzynastu równań: jedenastu równań strukturalnych (1) i (16)–(25) oraz dwóch równań obserwacji: (26) i (27), które są rozpatrywane warunkowo względem wektora parametrów podlegających estymacji: $\theta = [\alpha \ \beta \ \gamma \ m^* \ \rho \ \varphi \ \delta \ \sigma_a \ \sigma_M]'$, gdzie σ_a i σ_M oznaczają odchylenia standardowe procesów losowych, dla których przyjmujemy rozkłady normalne o zerowych wartościach oczekiwanych: $\varepsilon_{A,t} \sim N(0, \sigma_a^2)$ i $\varepsilon_{M,t} \sim N(0, \sigma_M^2)$.

6. Zarys stosowanej techniki ekonometrycznej

Weryfikacja zgodności z danymi empirycznymi przyjmowanych w modelu równowagi ogólnej założeń jest możliwa po jego połączeniu z danymi empirycznymi i estymacji tzw. połączonego (hybrydowego) modelu wektorowej autoregresji. Jest to model autoregresji wektorowej, w którym uwzględnia się informacje pochodzące z modelu równowagi ogólnej poprzez konstrukcję odpowiedniego rozkładu prawdopodobieństwa, tzw. rozkładu *a priori*. Całość estymacji przeprowadzana jest na gruncie wnioskowania bayesowskiego. Konstrukcja połączonego modelu VAR i DSGE pozwala za pomocą danych empirycznych wskazać, które z podejść jest odpowiedniejsze do ich opisu: wektorowa autoregresja czy też, ściślej wynikający z teorii ekonomii, model równowagi ogólnej. Istotną zaletą konstrukcji DSGE-VAR jest możliwość stopniowego uchylania restrykcji, wynikających

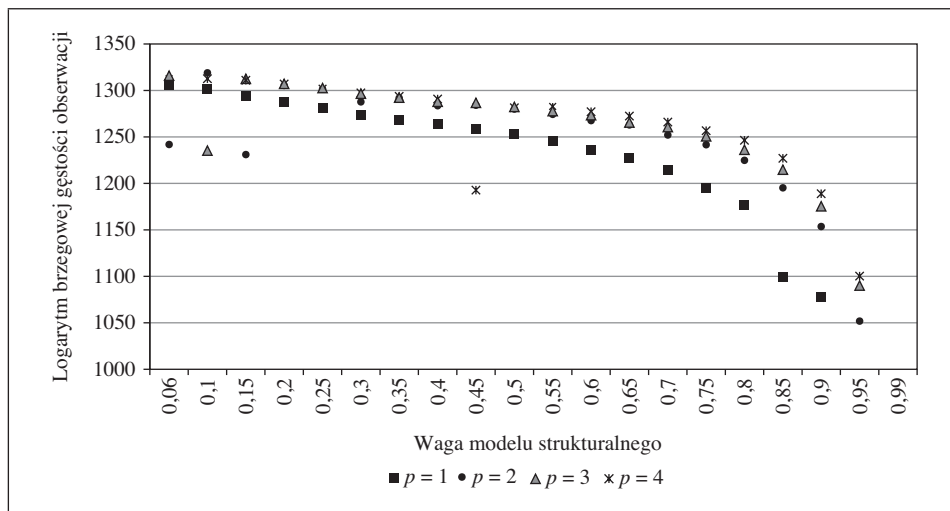
z modelu równowagi ogólnej, których siła jest określana przez tzw. parametr wagowy λ . Niska waga $W = \lambda(1 + \lambda)$ modelu równowagi ogólnej w połączonym oznacza, że przyjęte założenia ekonomiczne nie są potwierdzane przez obserwacje, do których opisu odpowiedniejsza jest wektorowa autokorelacja bez restrykcji. I odwrotnie, jeśli uzyskana waga W jest wysoka, to obserwacje wskazują, że do ich opisu stosowniejszy jest estymowany model równowagi ogólnej, a wynikające z niego restrykcje są w pełni potwierdzone, oznaczając jego poprawną specyfikację. Optymalna waga W jest ustalana na podstawie kryterium maksymalizacji wartości brzegowej gęstości obserwacji. Koncepcja DSGE-VAR została zaproponowana w pracach [Del Negro i Schorfheide 2004, 2006] i następnie rozwinięta w pracy [Del Negro i in. 2007]. Z ważnych artykułów poświęconych temu zagadnieniu należy jeszcze wymienić [An i Schorfheide 2007] i [Christiano 2007]. Omówienie szczegółów metodologii DSGE-VAR wraz z dyskusją zagadnień empirycznych zawierają m.in. prace [Wróbel-Rotter 2013a, 2013b, 2013c]. Przegląd zagadnień związanych z metodologią DSGE można znaleźć m.in. w pracach [Wróbel-Rotter 2012c, 2012d] oraz w opracowaniach wcześniejszych [Wróbel-Rotter 2007a, 2007b, 2007c]. Strona estymacyjna i numeryczna metodologii DSGE-VAR została przedstawiona m.in. w pracach [Wróbel-Rotter 2008, 2011b, 2012a, 2013d]. Omówienie i wyprowadzenie równań jednego z modeli równowagi ogólnej, pojawiającego się w powyższych artykułach, autorka zaprezentowała w pracach [Wróbel-Rotter 2011a, 2011c, 2012b]. Niniejsza praca przedstawia fragment badań związanych z oceną stopnia potwierdzenia przez dane empiryczne modeli równowagi ogólnej.

7. Wyniki empiryczne

Estymację modelu ekonometrycznego przeprowadzono dla 20 arbitralnie wybranych wag W_i , od 5% do 99%, z krokiem 5%, których wartości pozwalają na stopniowe przeanalizowanie jego dopasowania do danych empirycznych. Minimalna waga modelu strukturalnego, zapewniająca istnienie odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa, jest równa nieco ponad 5%, natomiast ostatnia wartość $W_i = 99\%$ oznacza, że model połączony wykazuje własności bliskie modelowi równowagi ogólnej. Model rozpatrzono dla czterech rzędów opóźnienia, od $p = 1$ do $p = 4$, które zostały oszacowane dla każdej z przyjętych wag. Otrzymane przybliżenia logarytmu brzegowej gęstości obserwacji, traktowanej jako ogólna miara dopasowania modelu do danych empirycznych, ilustruje rys. 1 i tabela 1.

Uzyskane rezultaty wskazują, że model równowagi ogólnej jest w nikłym stopniu potwierdzany przez obserwacje. Widoczny jest systematyczny spadek poziomu brzegowej gęstości obserwacji w miarę zwiększania się udziału modelu

strukturalnego w połączonym oraz, dodatkowo, występują nieregularności w jej ocenie. Dla weryfikacji poprawności wyników zastosowano dwie metody aproksymacji logarytmu brzegowej gęstości obserwacji, z których pierwsza wykorzystuje zmodyfikowaną średnią harmoniczną, stosowaną w algorytmie Metropolisa i Hastingsa, natomiast druga wykorzystuje aproksymację Laplace'a bezpośrednio do rozkładu *a posteriori*, którego parametry wyznaczono za pomocą wstępnych metod numerycznych [Geweke 1999, Tierney i Kadane 1986]. W przypadku czterech modeli połączonych, szacowanych dla wag modelu strukturalnego, równych 0,06 i 0,15 dla $p = 2$, dla $p = 3$ przy wadze $W_i = 0,1$ oraz dla $p = 4$ przy $W_i = 0,45$, wartości logarytmu brzegowej gęstości obserwacji dla aproksymacji Laplace'a są wyższe od zmodyfikowanej średniej harmonicznnej. Oznacza to, że algorytm Metropolisa i Hastingsa, standardowo stosowany w tych zagadnieniach, nie znajduje wyżej położonego maksimum rozkładu *a posteriori*, co może wskazywać na problemy z jego funkcjonowaniem w tym zagadnieniu. W przypadku modeli połączonych dla pozostałych wag zachowane są odpowiednie regularności.



Rys. 1. Oszacowanie logarytmu brzegowej gęstości obserwacji w zależności od udziału modelu równowagi ogólnej w modelu połączonym

Źródło: opracowanie własne.

Dla wszystkich czterech rzędów opóźnienia wektorowej autoregresji najwyższe wartości logarytmu brzegowej gęstości obserwacji otrzymujemy dla przypadków, kiedy udział informacji płynących z modelu ekonomicznego jest minimalny. Najwyższą wartość logarytmu brzegowej gęstości obserwacji odnotowano dla $p = 2$, równą 1318,9, co oznacza, że do opisu przyjętych danych empirycznych najbar-

dziej adekwatny jest model wektorowej autoregresji z bardzo słabymi ograniczeniami. Wskazuje to również, że restrykcje wynikające z przyjętego modelu równowagi ogólnej nie są potwierdzane przez obserwacje, zaś sam model strukturalny może być niepoprawnie wyspecyfikowany. Oszacowanie logarytmu brzegowej gęstości obserwacji wykazuje tendencję malejącą wraz ze zwiększaniem się wagi modelu równowagi ogólnej w modelu połączonym, aż do przypadku uznanego za graniczny, $W_i = 99\%$, dla którego jej oszacowanie waha się w granicach 325–580. Widoczna jest również zależność brzegowej gęstości obserwacji od rzędu opóźnienia – najszybszy jej spadek jest widoczny dla wektorowej autoregresji rzędu 1, co może oznaczać, że w modelu występuje zbyt mała liczba swobodnych parametrów koniecznych do ujęcia dynamiki zmiennych obserwowanych. Uzyskane rezultaty potwierdza również formalna estymacja optymalnej wagi modelu równowagi ogólnej w wektorowej autoregresji.

Tabela 1. Logarytm brzegowej gęstości obserwacji

Waga W_i modelu strukturalnego	Zmodyfikowana średnia harmoniczna				Aproksymacja Laplace'a			
	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
0,06	1307,3	1241,9	1317,3	1312,7	1301,8	1312,6	1314,7	1309,7
0,1	1302,0	1318,9	1236,6	1313,7	1297,4	1313,4	1306,4	1311,7
0,15	1294,7	1231,0	1314,0	1312,0	1286,2	1301,2	1308,4	1304,5
0,2	1288,5	1305,5	1308,5	1308,1	1268,4	1298,7	1301,8	1301,2
0,25	1282,1	1301,4	1304,0	1302,6	1262,3	1290,9	1284,7	1296,4
0,3	1275,1	1287,8	1297,9	1298,5	1255,7	1283,0	1291,1	1289,5
0,35	1269,2	1291,9	1293,7	1294,7	1247,8	1270,4	1281,0	1274,1
0,4	1265,0	1283,6	1289,2	1291,9	1249,1	1266,2	1273,2	1275,1
0,45	1259,2	1284,1	1288,1	1193,7	1244,3	1269,7	1267,4	1258,8
0,5	1253,6	1280,0	1283,7	1282,4	1234,1	1264,5	1261,3	1270,0
0,55	1246,9	1274,3	1279,2	1282,8	1233,6	1258,1	1256,1	1268,9
0,6	1237,3	1267,5	1274,9	1278,1	1217,9	1250,4	1256,6	1258,3
0,65	1228,6	1262,9	1266,9	1273,5	1210,6	1243,6	1248,8	1258,3
0,7	1215,7	1252,0	1262,0	1267,1	1202,5	1232,3	1242,3	1245,6
0,75	1196,3	1241,6	1252,1	1257,7	1170,4	1218,5	1238,6	1243,9
0,8	1178,2	1224,8	1237,6	1247,4	1158,1	1207,6	1211,4	1233,4
0,85	1100,2	1195,2	1216,1	1228,1	1068,2	1174,3	1192,7	1206,2
0,9	1078,3	1153,6	1176,8	1189,9	1047,2	1133,4	1152,6	1170,9
0,95	704,1	1051,9	1091,4	1101,5	682,0	1018,5	1076,9	1070,0
0,99	579,2	534,8	580,3	325,1	540,0	519,9	561,0	230,1

Źródło: opracowanie własne.

Podejście DSGE-VAR było stosowane również do sprawdzenia stopnia potwierdzenia przez obserwacje innych, bardziej rozbudowanych modeli równowagi ogólnej. W szczególności w pracy [Del Negro i Schorfheide 2004] optymalny udział informacji *a priori* wynosił ok. 50%, podobnie jak dla jednego z bardziej rozbudowanych modeli DSGE dla strefy euro [Del Negro i in. 2007]. W modelach rozpatrywanych w [Watanabe 2007], dla autoregresji rzędu czwartego, oraz w [Lee, Matheson i Smith 2007] również oscylował on wokół wartości 50%; nieco większy, bo 56-procentowy udział odnotowano w pracy [Chow i McNelis 2010]. Optymalny udział informacji *a priori* w połączonej wektorowej autoregresji dla modelu DSGE opracowanego w Riksbanku był wyższy i wynosił ok. 83% (zob. [Adolfson i in. 2008]). Znacznie niższe poziomy wagi rozkładu *a priori* odnotowano dla modeli rozpatrywanych w pracach [Kolasa, Rubaszek i Skrzypczyński 2012], gdzie wahała się ona od 24% – dla opóźnienia rzędu pierwszego, do 48% – dla autoregresji rzędu czwartego, oraz w [Brzoza-Brzezina i Kolasa 2012], gdzie odnotowano dla niej 25%.

Przeanalizowane na wybranym przykładzie modelu równowagi ogólnej kształtowanie się brzegowej gęstości obserwacji, w zależności od wartości parametru wagowego λ , wskazuje na prawidłowość polegającą na wzroście brzegowej gęstości obserwacji w miarę zwiększania się informacji *a priori*, pochodzącej z modelu równowagi ogólnej, w wektorowej autoregresji bez restrykcji, osiągnięciu wartości maksymalnej i następnym jej spadku, w miarę jak model połączony zaczyna wykazywać własności bliskie modelowi równowagi ogólnej (zob. m.in. [Del Negro i Schorfheide 2006]). Schemat takiego kształtowania się brzegowej gęstości obserwacji jest charakterystyczny dla większości modeli DSGE-VAR, przy czym poziom optymalnego udziału informacji *a priori* jest uzależniony od kilku czynników, z których zwykle najważniejsze są: specyfikacja samego modelu równowagi ogólnej oraz rząd opóźnienia wektorowej autoregresji; im jest on wyższy, tym silniejsze restrykcje *a priori*, przejawiające się wyższą wartością λ , należy uwzględnić w modelu. Analizę kształtowania się optymalnej wartości wagi informacji pochodzącej z modelu równowagi ogólnej w połączonym, w zależności od rzędu opóźnienia wektorowej autoregresji oraz dodatkowo od różnych rozkładów *a priori* dla parametru wagowego można znaleźć m.in. w pracy [Wróbel-Rotter 2013b]. Podsumowując, modele DSGE w praktyce są zbyt stylizowane, aby dobrze opisywać dynamikę zmiennych makroekonomicznych, natomiast modele wektorowej autoregresji bez restrykcji są zbyt giętkie w dopasowywaniu się do danych. Model DSGE-VAR łączy te podejścia, zachowując pewien stopień restrykcji wynikających z DSGE i jednocześnie wykorzystuje elastyczność VAR.

8. Zakończenie

Głównym celem pracy była ilustracja technik empirycznej weryfikacji zgodności założeń wybranego modelu równowagi ogólnej z danymi empirycznymi. W pracy omówiono zagadnienia mikroekonomiczne, wyprowadzenie równań strukturalnych, eliminację trendów stochastycznych ze zmiennych endogenicznych oraz sposób połączenia modelu z szeregami makroekonomicznymi. Model ten następnie został poddany weryfikacji pod względem stopnia zgodności występujących w nim założeń z danymi empirycznymi. Uzyskane rezultaty wskazują, że przyjęte założenia nie są potwierdzone przez obserwacje, zaś sam model ekonomiczny jest potencjalnie niepoprawnie wyspecyfikowany. Oznacza to, że założenia dotyczące kształtowania się preferencji konsumentów, technologii producentów czy też struktury procesów losowych, kształtujących zmienne makroekonomiczne w czasie, są zbyt restrykcyjne i nie odpowiadają charakterowi zmiennych obserwowanych. W konsekwencji wnioski ekonomiczne wyprowadzane na podstawie zaprezentowanego modelu równowagi ogólnej mogą być obarczone dużym błędem.

Literatura

- Adolfson M. i in. [2008], *Evaluating an Estimated New Keynesian Small Open Economy Model*, „Journal of Economic Dynamics and Control”, nr 32.
- An S., Schorfheide F. [2007], *Bayesian Analysis of DSGE Models – Rejoinder*, „Econometric Reviews”, nr 26, <http://dx.doi.org/10.1080/07474930701220246>.
- Brzoza-Brzezina M., Kolasa M. [2012], *Bayesian Evaluation of DSGE Models with Financial Frictions*, National Bank of Poland Working Paper, nr 109.
- Chow H.K., McNelis P.D. [2010], *Need Singapore Fear Floating? A DSGE-VAR Approach*, Research Collection School of Economics, Paper 1250.
- Christiano L.J. [2007], *Comment*, „Journal of Business & Economic Statistics”, nr 25.
- Cogley T., Nason J. [1995], *Output Dynamics in Real Business Cycle Models*, „American Economic Review”, nr 85.
- Del Negro M., Schorfheide F. [2004], *Priors from General Equilibrium Models for VARs*, „International Economic Review”, nr 45, <http://dx.doi.org/10.1111/j.1468-2354.2004.00139.x>.
- Del Negro M., Schorfheide F. [2006], *How Good Is What You've Got? DSGE-VAR as a Toolkit for Evaluating the DSGE Models*, „Economic Review”, Q2.
- Del Negro M. i in. [2007], *On the Fit of New-Keynesian Models*, „Journal of Business & Economic Statistics”, nr 25.
- Geweke J. [1999], *Using Simulation Methods for Bayesian Econometric Models: Inference, Development and Communication*, „Econometric Reviews”, nr 18, <http://dx.doi.org/10.1080/07474939908800428>.
- Kolasa M., Rubaszek M., Skrzypczyński P. [2012], *Putting the New Keynesian DSGE Model to the Real-time Forecasting Test*, „Journal of Money, Credit and Banking”, nr 44, <http://dx.doi.org/10.1111/j.1538-4616.2012.00533.x>.

- Lee K., Matheson T., Smith C. [2007], *Open Economy DSGE-VAR Forecasting and Policy Analysis: Head to Head with the RBNZ Published Forecasts*, Reserve Bank of New Zealand Discussion Paper Series, DP2007/01.
- Schorfheide F. [2000], *Loss Function-based Evaluation of DSGE Models*, „Journal of Applied Econometrics”, nr 15, <http://dx.doi.org/10.1002/jae.582>.
- Tierney L., Kadane J.B. [1986], *Accurate Approximations for Posterior Moments and Marginal Densities*, „Journal of the American Statistical Association”, nr 393.
- Walsh C.E. [2003], *Monetary Theory and Policy*, MIT Press, Cambridge, UK.
- Watanabe T. [2007], *The Application of DSGE-VAR Model to Macroeconomic Data in Japan*, ESRI Discussion Paper Series 225-E.
- Wróbel-Rotter R. [2007a], *Dynamic Stochastic General Equilibrium Models: Structure and Estimation* [w:] *Modelling Economies in Transition 2006*, red. W. Welfe, P. Wdowiński, Łódź.
- Wróbel-Rotter R. [2007b], *Dynamiczne Stochastyczne Modele Równowagi Ogólnej: zarys metodologii badań empirycznych*, „Folia Oeconomica Cracoviensia”, vol. 48.
- Wróbel-Rotter R. [2007c], *Dynamiczny Stochastyczny Model Równowagi Ogólnej: przykład dla gospodarki polskiej*, „Przegląd Statystyczny”, nr 3, t. 54.
- Wróbel-Rotter R. [2008], *Bayesian Estimation of a Dynamic General Equilibrium Model* [w:] *Metody ilościowe w naukach ekonomicznych*, Ósme Warsztaty Doktorskie z zakresu Ekonometrii i Statystyki, red. A. Welfe, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Warszawa.
- Wróbel-Rotter R. [2011a], *Empiryczne modele równowagi ogólnej: gospodarstwa domowe i producent finalny*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, nr 869.
- Wróbel-Rotter R. [2011b], *Obszary stabilności rozwiązania empirycznych modeli równowagi ogólnej: zastosowanie metod analizy wrażliwości*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, nr 873.
- Wróbel-Rotter R. [2011c], *Sektor producentów pośrednich w empirycznym modelu równowagi ogólnej*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, nr 872.
- Wróbel-Rotter R. [2012a], *Empiryczne modele równowagi ogólnej: zagadnienia numeryczne estymacji bayesowskiej*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, nr 878.
- Wróbel-Rotter R. [2012b], *Struktura empirycznego modelu równowagi ogólnej dla niejednorodnych gospodarstw domowych*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, nr 879.
- Wróbel-Rotter R. [2012c], *Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część I: estymowane modele równowagi ogólnej w zarysie*, „Folia Oeconomica Cracoviensia”, nr 53.
- Wróbel-Rotter R. [2012d], *Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część II: wnioskowanie w estymowanych modelach równowagi ogólnej*, „Folia Oeconomica Cracoviensia”, nr 53.
- Wróbel-Rotter R. [2013a], *Estymowane modele równowagi ogólnej i autoregresja wektorowa. Aspekty teoretyczne*, „Przegląd Statystyczny”, vol. 53, nr 3.
- Wróbel-Rotter R. [2013b], *Estymowane modele równowagi ogólnej i wektorowa autoregresja. Aspekty praktyczne*, „Przegląd Statystyczny”, vol. 53, nr 4.
- Wróbel-Rotter R. [2013c], *Estymowane modele równowagi ogólnej i wektorowa autoregresja: model hybrydowy*, „Bank i Kredyt”, nr 44(5).

Wróbel-Rotter R. [2013d], *Estymowane modele równowagi ogólnej: zastosowanie metody dekompozycji funkcji do oceny zależności między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, nr 904.

Data-based Misspecification Analysis of a General Equilibrium Model

The paper presents the derivation of structural equations of an estimated general equilibrium model, illustrates techniques of its connection with the data observed and discusses a method of assessing the degree of acceptance by the data. The results suggest that the model is not confirmed by the data. Logarithms of the marginal data density tend to systematically decrease when the weight of the structural model is being increased in hybrid vector autoregression. This defines an econometric tool which can capture a general equilibrium model on the one hand and almost unrestricted vector autoregression on the other. As a consequence of high structural model misspecification, economic conclusions it leads one to draw may be highly inaccurate.

Keywords: DSGE-VAR, marginal data density, misspecification, Cash in Advance Model.